

ТВОЙ РЕПЕТИТОР
ПО МАТЕМАТИКЕ

ПОЛНЫЙ КУРС ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

О. В. БОЛЬШАКОВА
Е. В. КАРПУНИНА

МУЛЬТИМЕДИЙНЫЙ
ТРЕНАЖЕР

ЭКЗАМЕН
НА 100 БАЛЛОВ!



МАТЕМАТИКА

Яндекс
ege.yandex.ru

Аванта

Полный курс подготовки к ЕГЭ +
мультимедийный репетитор Яндекс

О. В. Большакова, Е. В. Карпунина

МАТЕМАТИКА

Полный курс
подготовки к ЕГЭ + CD

АСТ
Москва

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Б79

Большакова О. В.

Б79 МАТЕМАТИКА: полный курс подготовки к ЕГЭ + CD / О. В. Большакова, Е. В. Карпунина — Москва: ООО «Издательство АСТ», 2014. — 320 с. (Полный курс подготовки к ЕГЭ + мультимедийный репетитор Яндекс).

ISBN 978-5-17-079483-6

Пособие подготовлено в соответствии с обязательным минимумом содержания основного общего и среднего (полного) общего образования по математике, кодификатором элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена и содержит весь материал, необходимый школьнику для самостоятельной подготовки к ЕГЭ. Прилагаемый компакт-диск, содержащий тесты по математике в формате ЕГЭ, поможет школьнику организовать самостоятельную работу по проверке собственных знаний. Программа автоматически проверяет правильность выполнения экзаменационных заданий, что позволяет контролировать уровень готовности к экзамену.

УДК 373:51
ББК 22.1я72

Содержание

| | |
|--|-----------|
| Введение..... | 9 |
| 1. АЛГЕБРА..... | 10 |
| 1.1. Числа, корни и степени | 10 |
| 1.1.1. Целые числа..... | 10 |
| 1.1.2. Степень с натуральным показателем | 10 |
| 1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа..... | 11 |
| 1.1.4. Степень с целым показателем | 15 |
| 1.1.5. Корень степени $n > 1$ и его свойства..... | 16 |
| 1.1.6. Степень с рациональным показателем и ее свойства.... | 18 |
| 1.1.7. Свойства степени с действительным показателем | 18 |
| 1.2. Основы тригонометрии | 18 |
| 1.2.1. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла..... | 18 |
| 1.2.2. Радианная мера угла | 19 |
| 1.2.3. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа..... | 20 |
| 1.2.4. Основные тригонометрические тождества | 21 |
| 1.2.5. Формулы приведения | 21 |
| 1.2.6. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. | 22 |
| 1.2.7. Синус и косинус двойного угла | 22 |
| 1.3. Логарифмы | 23 |
| 1.3.1. Логарифм числа | 23 |
| 1.3.2. Логарифм произведения, частного, степени..... | 24 |
| 1.3.3. Десятичный и натуральный логарифм, число e | 25 |
| 1.4. Преобразование выражений | 28 |
| 1.4.1. Преобразование выражений, включающих арифметические операции | 28 |
| 1.4.2. Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень | 28 |
| 1.4.3. Преобразование выражений в уравнениях, включающих корни натуральной степени..... | 30 |
| 1.4.4. Преобразование тригонометрических выражений | 32 |
| 1.4.5. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования | 36 |
| 1.4.6. Модуль (абсолютная величина) числа | 38 |
| 2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА | 39 |
| 2.1. Уравнения | 39 |
| 2.1.1. Квадратные уравнения..... | 40 |
| 2.1.2. Рациональные уравнения..... | 44 |
| 2.1.3. Иррациональные уравнения | 52 |

| | | |
|-------------|---|------------|
| 2.1.4. | Тригонометрические уравнения | 57 |
| 2.1.5. | Показательные уравнения | 76 |
| 2.1.6. | Логарифмические уравнения | 83 |
| 2.1.7. | Равносильность уравнений, систем уравнений | 89 |
| 2.1.8. | Простейшие системы уравнений с двумя переменными | 92 |
| 2.1.9. | Основные приемы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных | 93 |
| 2.1.10. | Использование свойств и графиков функций при решении уравнений | 97 |
| 2.1.11. | Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем | 106 |
| 2.1.12. | Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений | 110 |
| 2.2. | Неравенства | 116 |
| 2.2.1. | Квадратные неравенства | 118 |
| 2.2.2. | Рациональные неравенства | 122 |
| 2.2.3. | Показательные неравенства | 125 |
| 2.2.4. | Логарифмические неравенства | 129 |
| 2.2.5. | Системы линейных неравенств | 132 |
| 2.2.6. | Системы неравенств с одной переменной | 134 |
| 2.2.7. | Равносильность неравенств, систем неравенств | 136 |
| 2.2.8. | Использование свойств и графиков функций при решении неравенств | 140 |
| 2.2.9. | Метод интервалов | 143 |
| 2.2.10. | Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем | 146 |
| 3. | ФУНКЦИИ | 150 |
| 3.1. | Определение и график функции | 150 |
| 3.1.1. | Функция, область определения функции | 150 |
| 3.1.2. | Множество значений функции | 151 |
| 3.1.3. | График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях | 152 |
| 3.1.4. | Обратная функция. График обратной функции | 154 |
| 3.1.5. | Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат | 156 |
| 3.2. | Элементарное исследование функций | 157 |
| 3.2.1. | Монотонность функций. Промежутки возрастания и убывания | 157 |

| | | |
|-------------|---|------------|
| 3.2.2. | Четность и нечетность функций..... | 158 |
| 3.2.3. | Периодичность функций | 160 |
| 3.2.4. | Ограниченность функций..... | 161 |
| 3.2.5. | Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции..... | 162 |
| 3.2.6. | Наибольшее и наименьшее значения функции..... | 164 |
| 3.3. | Основные элементарные функции..... | 165 |
| 3.3.1. | Линейная функция, ее график | 165 |
| 3.3.2. | Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, ее график..... | 167 |
| 3.3.3. | Квадратичная функция, ее график..... | 169 |
| 3.3.4. | Степенная функция с натуральным показателем, ее график | 172 |
| 3.3.5. | Тригонометрическая функция, ее график | 174 |
| 3.3.6. | Показательная функция, ее график | 178 |
| 3.3.7. | Логарифмическая функция, ее график | 179 |
| 4. | НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА | 181 |
| 4.1. | Производная | 181 |
| 4.1.1. | Понятие о производной функции, геометрический смысл производной | 181 |
| 4.1.2. | Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком..... | 185 |
| 4.1.3. | Уравнение касательной к графику функции | 186 |
| 4.1.4. | Производные суммы, разности, произведения, частного..... | 187 |
| 4.1.5. | Производные основных элементарных функций..... | 188 |
| 4.1.6. | Вторая производная и ее физический смысл | 189 |
| 4.2. | Исследование функций | 189 |
| 4.2.1. | Применение производной к исследованию функций и построению графиков | 189 |
| 4.2.2. | Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах..... | 196 |
| 4.3. | Первообразная и интеграл | 198 |
| 4.3.1. | Первообразные элементарных функций..... | 198 |
| 4.3.2. | Примеры применения интеграла в физике и геометрии | 201 |
| 5. | ГЕОМЕТРИЯ | 203 |
| 5.1. | Планиметрия | 203 |
| 5.1.1. | Треугольник | 203 |
| 5.1.2. | Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат | 216 |

| | | |
|-------------|--|------------|
| 5.1.3. | Трапеция | 220 |
| 5.1.4. | Окружность и круг | 221 |
| 5.1.5. | Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника | 224 |
| 5.1.6. | Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника | 225 |
| 5.1.7. | Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника .. | 226 |
| 5.2. | Прямые и плоскости в пространстве | 227 |
| 5.2.1. | Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых | 227 |
| 5.2.2. | Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства..... | 228 |
| 5.2.3. | Параллельность плоскостей, признаки и свойства..... | 229 |
| 5.2.4. | Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трех перпендикулярах..... | 230 |
| 5.2.5. | Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства | 232 |
| 5.2.6. | Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур..... | 233 |
| 5.3. | Многогранники..... | 236 |
| 5.3.1. | Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма | 236 |
| 5.3.2. | Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде | 237 |
| 5.3.3. | Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида | 240 |
| 5.3.4. | Сечения куба, призмы, пирамиды..... | 243 |
| 5.3.5. | Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр) | 246 |
| 5.4. | Тела и поверхности вращения | 249 |
| 5.4.1. | Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка..... | 249 |
| 5.4.2. | Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка..... | 251 |
| 5.4.3. | Шар и сфера, их сечения | 252 |
| 5.5. | Измерение геометрических величин | 253 |
| 5.5.1. | Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной окружности | 253 |
| 5.5.2. | Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями | 254 |

| | | |
|---|--|------------|
| 5.5.3. | Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника | 257 |
| 5.5.4. | Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние между параллельными плоскостями | 258 |
| 5.5.5. | Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора | 260 |
| 5.5.6. | Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы | 262 |
| 5.5.7. | Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара | 263 |
| 5.6. | Координаты и векторы | 265 |
| 5.6.1. | Декартовы координаты на плоскости и в пространстве | 265 |
| 5.6.2. | Формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы | 269 |
| 5.6.3. | Вектор, модуль вектора, равенство векторов; сложение векторов и умножение вектора на число | 272 |
| 5.6.4. | Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам | 276 |
| 5.6.5. | Компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам | 276 |
| 5.6.6. | Координаты вектора; скалярное произведение векторов; угол между векторами | 278 |
| 6. | ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ | 282 |
| 6.1. | Элементы комбинаторики | 282 |
| 6.1.1. | Поочередный и одновременный выбор | 282 |
| 6.1.2. | Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона | 286 |
| 6.2. | Элементы статистики | 289 |
| 6.2.1. | Табличное и графическое представление данных | 289 |
| 6.2.2. | Числовые характеристики рядов данных | 293 |
| 6.3. | Элементы теории вероятностей | 296 |
| 6.3.1. | Вероятности событий | 296 |
| 6.3.2. | Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач | 299 |
| СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ | 303 | |
| АЛГЕБРА | 303 | |
| Степень с натуральным показателем и ее свойства | 303 | |
| Арифметические действия с обыкновенными дробями | 303 | |
| Проценты | 303 | |

| | |
|---|-----|
| Арифметический квадратный корень и его свойства..... | 304 |
| Степень с рациональным показателем и ее свойства | 304 |
| Свойства степени с действительным показателем | 304 |
| Логарифмы | 304 |
| Модуль числа..... | 306 |
| Уравнения..... | 306 |
| Неравенства | 308 |
| ТРИГОНОМЕТРИЯ | 311 |
| Числовая окружность на координатной плоскости | 311 |
| Значения тригонометрических функций некоторых углов | 311 |
| Формулы приведения..... | 312 |
| Основные тригонометрические тождества | 312 |
| Формулы суммы и разности аргументов..... | 312 |
| Формулы двойного угла | 312 |
| Формулы понижения степени..... | 312 |
| Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение | 313 |
| Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму..... | 313 |
| ГЕОМЕТРИЯ | 313 |
| Формулы для нахождения медианы и высоты треугольника | 313 |
| Теоремы о периметрах и площадях подобных треугольников .. | 314 |
| Теорема Пифагора..... | 314 |
| Соотношение между сторонами и углами треугольника | 314 |
| Теорема косинусов | 314 |
| Теорема синусов | 314 |
| Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° , 45° и 60° .. | 314 |
| Формулы для вычисления площади..... | 314 |
| Правильные многоугольники | 316 |
| Формулы для вычисления площади правильного n -угольника, его стороны и радиуса вписанной окружности..... | 316 |
| ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ | 316 |
| Бином Ньютона | 317 |
| Числовые характеристики рядов данных..... | 317 |
| Основные виды событий..... | 317 |
| Классическая вероятность | 317 |
| ЛИТЕРАТУРА | 318 |

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие является результатом обобщения учителями-практиками опыта работы по подготовке обучающихся к единому государственному экзамену по математике. Для успешного прохождения итоговой аттестации в форме ЕГЭ необходимо иметь высокий уровень теоретических знаний по предмету и уметь выполнять различные виды тестовых заданий. Пособие содержит краткий теоретический материал по курсу математики, необходимый для подготовки к ЕГЭ. При написании данного пособия авторы руководствовались следующими документами:

- федеральный компонент государственных образовательных стандартов среднего (полного) общего образования (Приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента Государственных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»);
- спецификация контрольно-измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена по математике в 2014 году;
- кодификатор элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения единого государственного экзамена по математике в 2014 году.

Данное пособие ориентировано на последовательное изложение теоретического материала, систематизацию знаний обучающихся по математике. В приложении содержатся справочные материалы, содержащие основные формулы и определения, знание которых необходимо и позволит избежать ученику часто встречающихся ошибок и недочетов при выполнении различных заданий.

Структура пособия соответствует кодификатору элементов содержания по математике для составления КИМ единого государственного экзамена.

Материал разделен на шесть тематических разделов, охватывающих весь курс математики средней школы и необходимые элементы содержания за курс основной школы. В пособии приведены наиболее типичные задания каждого из разделов и их решения с необходимыми пояснениями.

Пособие предназначено для быстрого и эффективного повторения всего курса математики и может быть использовано как для самостоятельной подготовки к экзамену, так и для дополнительных занятий при подготовке к ЕГЭ.

1. АЛГЕБРА

1.1. Числа, корни и степени

1.1.1. Целые числа

Натуральные числа, все числа, противоположные им по знаку, а также число ноль образуют множество **целых чисел**. **Множество целых чисел обозначается** большой буквой Z .

$$4 \in Z, -5 \in Z, 0 \in Z, 3,6 \in Z$$

Среди целых чисел нет и не может быть ни обыкновенных, ни десятичных дробей.

Наибольшего и наименьшего целого числа не существует.

1.1.2. Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n , большим единицы, называется произведение n одинаковых множителей, каждый из которых равен a : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ множителей}}$.

n множителей

Число a называется основанием степени, а число n — показателем степени.

Свойства степеней с натуральным показателем

$$a^1 = a$$

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается неизменным).

2. $a^n : a^m = a^{n-m}$, $n > m$ (при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основание остается неизменным).

3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ (при возведении степени в степень показатели перемножаются, а основание остается неизменным).

4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ (при возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый из множителей).

5. $(a : b)^n = a^n : b^n$, $b \neq 0$ (при возведении в степень частного возводятся в эту степень и числитель, и знаменатель).

Пример № 1

Найдите значение выражения $5^{0,36} \cdot 25^{0,32}$.

Решение: $5^{0,36} \cdot 25^{0,32} = 5^{0,36} \cdot 5^{0,64} = 5^{0,36+0,64} = 5^1 = 5$.

Ответ: 5.

1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа

Обыкновенные дроби

Если рациональное число записать в виде отношения двух чисел $\frac{m}{n}$, то получим **обыкновенную дробь**. Число, записанное над чертой, называется *числителем* дроби, а число, записанное под чертой, — *знаменателем* дроби.

Дробь, числитель которой меньше знаменателя, называется **правильной**. Например: $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{23}$, $\frac{9}{10}$. Дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, называется **неправильной** дробью. Например: $\frac{18}{13}$, $\frac{31}{31} = 1$.

Любую неправильную дробь можно представить в виде смешанного числа, то есть выделить целую часть.

$$\text{Например: } \frac{17}{11} = \frac{11+6}{11} = \frac{11}{11} + \frac{6}{11} = 1 + \frac{6}{11} = 1\frac{6}{11}.$$

Любое смешанное число можно представить в виде неправильной дроби. Например: $3\frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

$$\text{Например: } \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20} \text{ или } \frac{8}{12} = \frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}.$$

Деление числителя и знаменателя на их общий делитель называют *сокращением дроби*.

Сравнение дробей

1. Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та дробь, у которой числитель больше: $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$.
2. Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та дробь, у которой знаменатель меньше: $\frac{13}{17} < \frac{13}{11}$.
3. Для сравнения дробей с разными числителями и знаменателями их предварительно приводят к общему знаменателю или к общему числителю.

Арифметические действия с обыкновенными дробями

— При *сложении* дробей с одинаковыми знаменателями к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби, а знаменатель оставляют тем же. Если возможно, то полученную дробь сокращают.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

— Если необходимо сложить дроби с разными знаменателями, то сначала нужно привести их к общему знаменателю.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$

— Чтобы найти *разность* дробей с одинаковыми знаменателями из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби, а знаменатель оставляют тем же. Если возможно, то полученную дробь сокращают.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

— Если необходимо найти разность дробей с разными знаменателями, то сначала нужно привести их к общему знаменателю.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad-cb}{bd}$$

— Чтобы найти *произведение* дробей, необходимо перемножить отдельно их числители и знаменатели, первое произведение

записать в числитель, а второе в знаменатель новой дроби. Чтобы перемножить смешанные числа, необходимо сначала представить их в виде неправильных дробей и воспользоваться правилом умножения.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

— Чтобы найти *частное* дробей, нужно первую дробь оставить без изменения, знак деления заменить умножением, вторую дробь заменить обратным числом, затем воспользоваться правилом умножения.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Десятичные дроби

Десятичная дробь — это другая форма записи обыкновенных дробей со знаменателем, равным 10, 100, 1000 и т. д. Например: 3,5; 4,76.

В десятичной дроби можно приписывать и отбрасывать справа нули — получится равная ей дробь.

Например: 3,79000 = 3,79 = 3,7900.

Дробь, имеющая бесконечное число знаков после запятой, называется бесконечной десятичной дробью.

Арифметические действия с десятичными дробями

— Чтобы найти *сумму* (или *разность*) двух чисел, записанных в виде десятичной дроби, необходимо выполнить следующие действия:

1. При необходимости уравнивать количество знаков после запятой, дописывая нули справа к соответствующей дроби.
2. Записать числа в столбик таким образом, чтобы соответствующие разряды совпадали, запятая должна оказаться под запятой.
3. Не обращая внимания на запятую, сложить (или вычесть) натуральные числа.
4. Поставить запятую в сумме (разности) под запятыми, складываемых (вычитаемых) дробей.

— Умножение двух десятичных дробей выполняется следующим образом:

1. Числа перемножаются, не обращая внимания на запятые.
2. В полученном произведении отделяем запятой справа столько же знаков, сколько отделено в обоих множителях вместе взятых.

— При умножении десятичной дроби на 10, 100, 1000, ... надо перенести запятую в этой дроби вправо на столько знаков, сколько нулей стоит после 1.

— Чтобы *разделить* десятичную дробь на натуральное число, надо:

1. Разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую.
2. Поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

— При делении десятичной дроби на 10, 100, 1000, ... надо перенести запятую в этой дроби влево на столько знаков, сколько нулей в делителе.

— При делении десятичной дроби на десятичную дробь сначала переносим запятую в делимом и делителе вправо на столько знаков, сколько их после запятой в делителе. А затем выполняем деление на натуральное число.

Проценты

Одна сотая часть любой величины или числа называется процентом. Таким образом, десятичная дробь 0,01 является одним процентом.

$$0,01 = 1\%$$

Перевод десятичной дроби в проценты и обратно:

$$0,123 = 12,3\% \text{ (умножили на } 100\%);$$

$$37\% = 0,37 \text{ (разделили на } 100\%).$$

Чтобы найти **проценты от числа**, нужно проценты представить в виде десятичной дроби и число умножить на полученную десятичную дробь.

Чтобы найти **число по его процентам**, нужно проценты представить в виде десятичной дроби и данное число разделить на полученную десятичную дробь.

Чтобы найти, **сколько процентов одно число составляет от другого**, нужно одно число разделить на другое и полученное произведение умножить на 100%.

Рациональные числа

Числа, которые можно записать в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число, называют **рациональными** числами.

Любое целое число a является рациональным числом, так как его можно записать в виде $\frac{a}{1}$.

Арифметические действия с рациональными числами

При сложении, вычитании, умножении рациональных чисел в результате тоже получаются рациональные числа.

Если делитель отличен от нуля, то частное двух рациональных чисел тоже рациональное число.

Любую десятичную дробь можно представить в виде рационального числа, но не все обыкновенные дроби можно представить в виде десятичной дроби.

Например, если мы попробуем число $\frac{1}{3}$ представить в виде десятичной дроби, нам необходимо разделить 1 на 3. Мы получим ноль целых, потом три десятых, а далее при делении все время будут повторяться остаток 1 и в частном цифра 3. Деление никогда не закончится.

$$\frac{1}{3} = 0,33333\dots$$

Такие записи называют периодическими дробями.

1.1.4. Степень с целым показателем

В пункте 1.1.2. мы говорили о степени с натуральным показателем, то есть целым положительным числом. Но показатель степени может быть и равным нулю, а также и целым отрицательным числом.

Необходимо запомнить, что $a^0 = 1$. Это верно для любых чисел, кроме нуля, так как выражение 0^0 не определено.

Рассмотрим, что такое степень с целым отрицательным показателем:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}; \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

Таким образом, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Естественно, помним, все это верно для $a \neq 0$, поскольку на ноль делить нельзя.

1.1.5. Корень степени $n > 1$ и его свойства

Если $n = 2$, то мы имеем дело с арифметическим квадратным корнем. По определению, арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a , то есть $(\sqrt{a})^2 = a$.

Например, $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{169} = 13$.

Запоминаем, что:

- 1) квадратный корень можно извлекать только из **неотрицательных** чисел!
- 2) выражение \sqrt{a} всегда **неотрицательно**!

Свойства арифметического квадратного корня

$$1. \sqrt{a} \geq 0. \quad 2. \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}. \quad 3. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Необходимо запомнить, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$!

Пример. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{4,2} \cdot \sqrt{2,8}}{\sqrt{0,24}}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{4,2} \cdot \sqrt{2,8}}{\sqrt{0,24}} = \sqrt{\frac{4,2 \cdot 2,8}{0,24}} = 7.$$

Ответ: 7.

Если $n=3$, то мы будем говорить о кубическом корне. Кубическим корнем из числа a называется такое число, при возведении которого в третью степень получается число a , то есть $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. Корень третьей степени можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.

Например: $\sqrt[3]{-125} = -5$; $\sqrt[3]{64} = 4$.

Дадим определение корня n -ной степени для любого целого n .

Корнем n -ной степени из числа a называется такое число, при возведении которого в n -ную степень получается число a , то есть $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Заметим, что корень нечетной степени можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел, а корень четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел.

Два основных тождества

Если n — четное число, то $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Если n — нечетное число, то $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Например, $\sqrt{(2-\pi)^2} = |2-\pi| = -(2-\pi) = \pi-2$.

Свойства корней

Если a и b — положительные числа, то выполняются следующие свойства:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nm]{a^{km}}.$$

Например, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{y}} = \sqrt[12]{y}$.

Например, $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$.

1.1.6. Степень с рациональным показателем и ее свойства

Показатель степени может быть не только целым, но и *дробным*, то есть рациональным числом.

Корни можно записывать в виде степеней с рациональным показателем:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}; \quad \sqrt[7]{a} = a^{\frac{1}{7}}.$$

В общем случае $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $a > 0$.

Выражение $a^{\frac{m}{n}}$ по определению равно $\sqrt[n]{a^m}$, условие $a > 0$.

Важно, что в рациональную степень можно возводить только положительные числа!

1.1.7. Свойства степени с действительным показателем

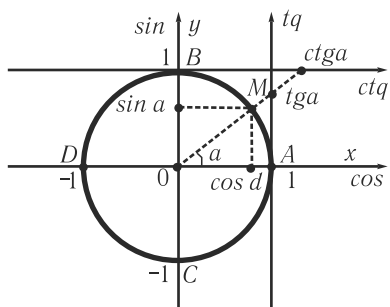
Для любых действительных x, y и положительных a и b имеют место следующие равенства:

$$\begin{array}{ll} a^x > 0 & (a^x)^y = a^{xy} \\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} & (ab)^x = a^x \cdot b^x \\ a^x \cdot a^y = a^{x+y} & \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \\ a^x : a^y = a^{x-y} & \end{array}$$

1.2. Основы тригонометрии

1.2.1. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса $R=1$ с центром O в начале координат. Координатные оси делят плоскость на четыре части, которые называют четвертями.



Рассмотрим произвольный угол α . Точка $M(x; y)$ лежит на единичной окружности, считаем, что точка M результат поворота точки $A(1; 0)$ на угол α . На оси OX находятся значения \cos угла поворота, а на оси OY , соответственно, значения \sin угла поворота. На дополнительных осях ctg и tg параллельных осям OX и OY , соответственно, находятся значения ctg и tg угла поворота.

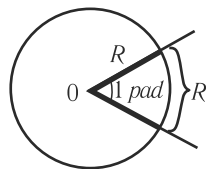
Тригонометрические функции (функции угла) определяются следующими равенствами:

- синус: $\sin \alpha = y$, т. е. ордината точки M ;
- косинус: $\cos \alpha = x$, т. е. абсцисса точки M ;
- тангенс: $tg \alpha = \frac{y}{x}$, т. е. отношение ординаты к абсциссе точки M ;
- котангенс: $ctg \alpha = \frac{x}{y}$, т. е. отношение абсциссы к ординате точки M .

Замечание. Значение tg угла поворота не существует для углов $2\pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Значение ctg угла поворота не существует для углов πn , $n \in \mathbb{Z}$.

1.2.2. Радианная мера угла

Радианной мерой угла называется отношение длины дуги окружности, для которой данный угол является центральным, к длине радиуса этой дуги.

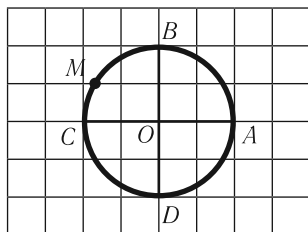


Радианная и градусная меры угла связаны между собой соотношением: радианная мера $1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$. Если угол содержит φ° , то его радианная мера α вычисляется по формуле $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi^\circ$.

Переход от радианной меры к градусной осуществляется по формуле $\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha$.

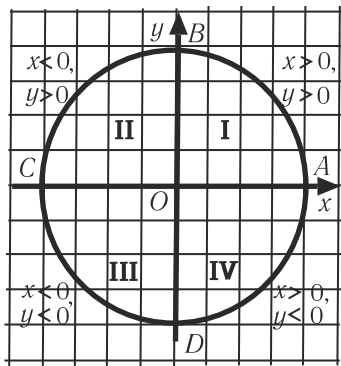
1.2.3. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа

Определение числовой окружности. Дана окружность радиуса 1. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:



1. Числу $t=0$ ставится в соответствие точка A — правый конец горизонтального диаметра.
2. Если $t>0$, то, двигаясь из точки A в направлении *против часовой стрелки* (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь длины; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$.
3. Если $t<0$, то, двигаясь из точки A *по часовой стрелке* (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь длины $|t|$; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) называют **числовой окружностью**.



Какое бы действительное число t ни взять, ему можно поставить в соответствие однозначно определенное число $\sin t$. Чтобы по числу t найти значение $\sin t$, нужно:

- 1) расположить числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат: центр окружности совмес-

тить с началом координат, ее радиус принять за масштабный отрезок:

$$A=A(1;0), B=B(0;1), C=C(-1;0), D=D(0;-1);$$

2) на окружности найти точку, соответствующую числу t ;

3) найти ординату этой точки.

Эта ордината и есть $\sin t$.

Фактически речь идет о функции $s=\sin t$, где t — любое действительное число.

Точно так же мы можем считать, что уже получили некоторые представления еще о трех функциях: $s=\cos t$, $s=\operatorname{tg} t$, $s=\operatorname{ctg} t$. Все эти функции называют **тригонометрическими функциями числового аргумента t** .

1.2.4. Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k.$$

1.2.5. Формулы приведения

| x | $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ | $\pi \pm \alpha$ | $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ | $2\pi \pm \alpha$ |
|------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\sin x$ | $\cos \alpha$ | $\mp \sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\pm \sin \alpha$ |
| $\cos x$ | $\mp \sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\pm \sin \alpha$ | $\cos \alpha$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\mp \operatorname{ctg} \alpha$ | $\pm \operatorname{tg} \alpha$ | $\mp \operatorname{ctg} \alpha$ | $\pm \operatorname{tg} \alpha$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $\mp \operatorname{tg} \alpha$ | $\pm \operatorname{ctg} \alpha$ | $\mp \operatorname{tg} \alpha$ | $\pm \operatorname{ctg} \alpha$ |

Заучивать эти формулы не нужно. Достаточно запомнить следующее правило:

- 1) если в формуле содержатся углы 180° и 360° (π и 2π), то наименование функции не изменяется; если же в формуле содержатся углы 90° и 270° ($\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$), то наименование функции меняется на кофункцию (синус на косинус, тангенс на котангенс и т. д.);
- 2) чтобы определить знак в правой части формулы (+ или -), достаточно, считая угол α острым, определить знак выражения, стоящего в левой части формулы.

Например, упростим выражение $tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Замечаем, что в формуле содержится угол $\frac{\pi}{2}$. Поэтому меняем название тригонометрической функции на кофункцию, т. е. получаем $ctg\alpha$. Чтобы определить знак перед $ctg\alpha$, предполагаем, что угол α острый. Тогда угол $\frac{\pi}{2} + \alpha$ находится во 2-й четверти. Помним, что тангенс угла во 2-й четверти отрицателен. Следовательно, перед $ctg\alpha$ ставим знак минус.

$$\text{Таким образом, } tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -ctg\alpha.$$

1.2.6. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}; \quad tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}.$$

1.2.7. Синус и косинус двойного угла

Выведем формулу *синуса двойного угла* (двойного аргумента):

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

1. Представим 2α в виде суммы $\alpha + \alpha$. Получим $\sin(\alpha + \alpha)$.
2. Применим формулу синуса суммы углов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$
Получим: $\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$.
3. Упростим выражение и получим: $2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Формула *косинуса двойного угла* (двойного аргумента) выглядит следующим образом:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Выведем эту формулу:

1. Представим 2α в виде суммы $\alpha + \alpha$.
Получим $\cos(\alpha + \alpha)$.
2. Используем формулу косинуса суммы углов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$
Получим: $\cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$.
3. Упростим выражение и в результате $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Используя основное тригонометрическое тождество, можно получить еще две формулы для вычисления косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

1.3. Логарифмы

1.3.1. Логарифм числа

Рассмотрим равенство $a^x = b$. Пусть переменная x может принимать любое действительное значение, тогда на переменные a и b накладываются такие ограничения: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить b .

Обозначение: $\log_a b$.

Использование в вычислениях вместо чисел их логарифмов позволяет заменить умножение более простой операцией сложения, деление — вычитанием, возведение в степень — умножением и извлечение корней — делением.

Примеры вычислений логарифмов:

$\log_5 25 = 2$, так как $5^2 = 25$.

$\log_2 \frac{1}{16} = -4$, так как $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

$\log_8 2 = \frac{1}{3}$, так как $8^{\frac{1}{3}} = 2$.

При $a > 0$

$\log_a a = 1$ (логарифм основания равен 1), так как $a^1 = a$,

$\log_a 1 = 0$ (логарифм единицы равен нулю), так как $a^0 = 1$.

Определение логарифма можно кратко записать так:

$a^{\log_a b} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Формулу $a^{\log_a b} = b$ называют *основным логарифмическим тождеством*.

Вычисление с применением основного логарифмического тождества: $6^{\log_6 12} = 12$.

Если основание логарифма a больше 1, то большее число b имеет больший логарифм:

$a > 1$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ тогда $\log_a b_1 < \log_a b_2 < \dots < \log_a b_n$.

Например, $\log_3 5 < \log_3 9 < \log_3 92$.

Если $b > 1$, то $\log_a b > 0$.

Если $b < 1$, то $\log_a b < 0$.

1.3.2. Логарифм произведения, частного, степени

Логарифм произведения

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, то логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Логарифм частного

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, то логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Заметим, что если $b < 0$, $c < 0$, то

$$\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|.$$

Логарифм степени

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$\log_a b^k = k \log_a b.$$

Заметим, что если $k = 2p$, то $\log_a b^{2p} = 2p \log_a |b|$.

Логарифм корня

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, m — натуральное число, то логарифм корня равен частному от деления логарифма подкоренного числа на показатель корня:

$$\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{\log_a b}{m}.$$

1.3.3. Десятичный и натуральный логарифм, число e

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10. Обозначение $\lg b$.

$\log_{10} b = \lg b$, где $b > 0$.

Для десятичных логарифмов справедливы равенства:

$$\lg 1 = 0, \lg 10 = 1, \lg 100 = 2, \lg 1000 = 3, \lg 10^n = n,$$

$$\lg 0,1 = -1, \lg 0,01 = -2, \lg 0,001 = -3, \lg 0,0001 = -4.$$

Для практического применения наиболее удобным основанием логарифмов является число 10. Но для теоретических исследований наиболее востребованным является другое основание: **иррациональное число e** .

$$e \approx 2.718281828459045.$$

Обычно используют приближенное значение равное 2,7.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e .

$$\log_e b = \ln b, \text{ где } b > 0.$$

Логарифм по основанию e имеет в математике большое значение. Число e приблизительно равно 2,7.

Пример № 1

Вычислите $\ln \frac{1}{e^3}$.

Решение:

$$\text{Так как } \frac{1}{e^3} = e^{-3}, \text{ то } \ln \frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3.$$

Ответ: -3 .

Пример № 2

Вычислите $\lg \frac{0,01}{\sqrt{10000}}$.

Решение:

$$\text{Так как } \frac{0,01}{\sqrt{10000}} = \frac{0,01}{100} = 10^{-4}, \text{ то } \lg \frac{0,01}{\sqrt{10000}} = \lg 10^{-4} = -4.$$

Ответ: -4 .

Число e играет важную роль в дифференциальном и интегральном исчислении, а также во многих других разделах математики.

Иногда число e называют *числом Эйлера* или *числом Непера*. Так как изначально в неявном виде число e возникло у барона Непера (1550–1617), использовавшем логарифмы по основанию, близкому к $1/e$, для существенного увеличения скорости вычислений. А первое использование константы, обозначенной e , относят к переписке между Гюйгенсом и Лейбницем в 1690–1691 гг. Обозначение e , ныне устоявшееся, было введено Эйлером в 1727 г.

Леонард Эйлер открыл цепную дробь для представления числа e :

$$c = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \ddots}}}}$$

Известны другие способы разложения числа e в бесконечную цепную дробь:

$$c = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \ddots}}}}$$

$$c = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5 + \ddots}}}}$$

$$c = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}}}}}}}$$

1.4. Преобразование выражений

1.4.1. Преобразование выражений, включающих арифметические операции

Операции сложения и умножения действительных (а значит, в том числе и натуральных, и целых) чисел обладают следующими свойствами:

1. $a+b=b+a$ (переместительный закон сложения).
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (сочетательный закон сложения).
3. $ab=ba$ (переместительный закон умножения).
4. $(ab)c=a(bc)$ (сочетательный закон умножения).
5. $a(b+c)=ab+ac$ (распределительный закон умножения относительно сложения).
6. $a(b-c)=ab-ac$ (распределительный закон умножения относительно вычитания).

Переместительные законы также называются коммутативными. Их смысл в том, что результат не меняется при перестановке слагаемых или сомножителей.

Сочетательные законы также называют ассоциативными. Их смысл в том, что результат не меняется при группировке слагаемых или сомножителей.

Распределительные законы также называют дистрибутивными. Их смысл для операции произведения заключается в том, что операцию произведения можно выполнить по частям — для каждого слагаемого, входящего во второй сомножитель.

1.4.2. Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень

По определению, чтобы возвести число a в **натуральную степень** n , необходимо n раз умножить число a само на себя, т. е.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (} n \text{ множителей)}.$$

Возведение не нулевого числа в отрицательную степень, равную (-1)

По определению, чтобы возвести не нулевое число a в отрицательную степень (-1) , нужно найти такое число, обозначим его через a^{-1} , чтобы выполнялось равенство: $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$.

Найденное число a^{-1} называется обратным к a .

Записи a^{-1} и $\frac{1}{a}$ эквивалентны, т. е. обратное к не нулевому числу a обозначается через $\frac{1}{a}$. $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Возведение не нулевого числа в отрицательную степень, равную $(-n)$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Формулы работы со степенями

1. $a^0 = 1, a \neq 0$.
2. $a^1 = a$.
3. $a^{-1} = \frac{1}{a}, a \neq 0$.
4. $a^n a^m = a^{n+m}, a \in R, n \in Z, m \in Z$.
5. $(a^n)^m = a^{nm}, a \in R, n \in Z, m \in Z$.
6. $a^n b^n = (ab)^n, a \in R, b \in R, n \in Z$.
7. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, a \in R, b \in R, b \neq 0, n \in Z$.

Выполним преобразование выражений, используя свойства степеней.

Пример № 1

Найдите значение выражения $\frac{\left(2^{\frac{3}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{14^9}$.

Решение:

Разложим число 14 в знаменателе дроби на простые множители и воспользуемся свойствами степеней:

$$\frac{\left(2^{\frac{3}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{14^9} = \frac{\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^{15} \cdot \left(7^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{(2 \cdot 7)^9} = \frac{2^9 \cdot 7^{10}}{2^9 \cdot 7^9} = 7.$$

Ответ: 7.

Пример № 2. Найдите значение выражения $0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}}$.

Решение: Представим число 0,8 в виде обыкновенной дроби, разложим число 20 на множители и воспользуемся свойствами степеней:

$$\begin{aligned} 0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}} &= \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot (4 \cdot 5)^{\frac{6}{7}} = \frac{4^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 4^{\frac{6}{7}} \cdot 5^{\frac{6}{7}}}{5^{\frac{1}{7}}} = \\ &= 4^{\frac{1}{7} + \frac{6}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7} + \frac{6}{7} - \frac{1}{7}} = 4 \cdot 5 = 20. \end{aligned}$$

Ответ: 20.

1.4.3. Преобразование выражений в уравнениях, включающих корни натуральной степени

Арифметическим корнем n -й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a .

Обозначение $\sqrt[n]{a}$.

Степень корня — это натуральное число, большее 1.

Основные свойства корней:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a, a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$.
2. $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$.
3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$.
4. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{Z}$.
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{N}, m > 1$.
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{Z}$.

Для корня четной степени справедливо тождество:

$$\sqrt[2n]{a} = \sqrt[2n]{|a|}, a \geq 0.$$

Для корня четной степени справедливы равенства:

$$\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}, a \geq 0, b \geq 0;$$

$$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}}, a \geq 0, b > 0.$$

Преобразование выражений в уравнениях, включающих корни натуральной степени, часто заключается в возведении обеих частей уравнения в степень, равную степени корня.

При сравнении выражений, включающих корни натуральной степени, целесообразно возводить корни в степень, равную наименьшему общему кратному (НОК) степеней корней исходных выражений.

Если степени сравниваемых корней равны, целесообразно сравнивать подкоренные выражения.

Кроме того, иногда бывает целесообразно умножать сравниваемые выражения на одно и то же выражение, например, для выделения разности квадратов. Так, выражения вида $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ умножать на $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Выражения $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ называются **взаимно сопряженными**. Их произведение равно разности подкоренных выражений:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b.$$

Выполним преобразование выражения, используя свойства корней.

Пример № 1. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[9]{\sqrt{a}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{a}}}$ при $a > 0$.

Решение:

$$\frac{\sqrt[9]{\sqrt{a}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{a}}} = \frac{\sqrt[18]{a}}{4\sqrt[9]{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[18]{a}}{4\sqrt[18]{a}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Пример № 2. Освободить дробь от иррациональности в знаменателе $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} &= \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5-3} = \\ &= \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Пример № 3. Найдите значение выражения: $\frac{\sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[5]{\frac{10 \cdot 16}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

Ответ: 2.

1.4.4. Преобразование тригонометрических выражений

Преобразование тригонометрических выражений — это процесс упрощения выражений с применением тригонометрических формул.

В преобразовании тригонометрических выражений помогают следующие **простые правила**:

1. Если выражение содержит разные тригонометрические функции одного аргумента, то попробуйте все функции выразить через одну или две тригонометрические функции.
2. Если в выражение входят тригонометрические функции от разных аргументов, то попробуйте свести все функции к одному аргументу.
3. Формулы приведения (п. 1.2.5.) помогут для выражения тригонометрической функции через кофункцию.
4. Единицу бывает полезно представить через основное тригонометрическое тождество $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

5. Если в выражение входят степени тригонометрических функций, то можно воспользоваться **формулами понижения степеней**:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

6. При преобразовании тригонометрических выражений на базовом уровне требуется знание формул суммы и разности двух углов (п. 1.2.6.), формул двойного угла (п. 1.2.7.).
7. При преобразовании выражений, содержащих тригонометрические функции, помогают следующие формулы.

Формулы тройного аргумента:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha; & \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}. \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha; \end{aligned}$$

Формулы преобразования суммы и разности одноименных тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \pm \sin \beta &= 2\sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \pm \beta}{2}; \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \text{ где } \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}, \text{ где } \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)); \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)); \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)). \end{aligned}$$

Формулы преобразования произведения тангенсов и котангенсов:

$$\begin{aligned}tg\alpha tg\beta &= \frac{tg\alpha + tg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta}; & tg\alpha ctg\beta &= \frac{tg\alpha + ctg\beta}{ctg\alpha + tg\beta}; \\ctg\alpha ctg\beta &= \frac{ctg\alpha + ctg\beta}{tg\alpha + tg\beta};\end{aligned}$$

Формулы, дающие рациональное выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла (универсальная подстановка через тангенс половинного аргумента):

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}; & \cos \alpha &= \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}; \\tg \alpha &= \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}; & tg \alpha &= \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{2tg \frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

Выполним преобразование тригонометрических выражений.

Пример № 1

Упростите выражение: $\sin \alpha \sin 2\alpha + \cos(2\pi + 3\alpha) - \cos \alpha \cos 2\alpha$.

Решение: для преобразований используем формулы приведения и формулу косинуса суммы двух аргументов.

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin 2\alpha + \cos(2\pi + 3\alpha) - \cos \alpha \cos 2\alpha &= \\&= \cos(2\pi + 3\alpha) - (\cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha) = \\&= \cos 3\alpha - \cos 3\alpha = 0.\end{aligned}$$

Ответ: 0.

Пример № 2

Найдите значение выражения: $\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}$.

Решение: для преобразований используем формулу косинуса двойного угла.

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = \frac{-24 \cos 34^\circ}{\cos 34^\circ} = -24.$$

Ответ: -24 .

Пример № 3

Найдите значение выражения: $\frac{5 \sin 98^\circ}{\sin 49^\circ \sin 41^\circ}$.

Решение: для преобразований используем формулы приведения и синуса двойного угла.

$$\frac{5 \sin 98^\circ}{\sin 49^\circ \sin 41^\circ} = \frac{5 \cdot 2 \sin 49^\circ \cos 49^\circ}{\sin 49^\circ \sin(90^\circ - 49^\circ)} = \frac{10 \sin 49^\circ \cos 49^\circ}{\sin 49^\circ \cos 49^\circ} = 10.$$

Ответ: 10 .

Пример № 4

Найдите значение выражения: $\frac{5 \sin 74^\circ}{\cos 37^\circ \cos 53^\circ}$.

Решение:

Для преобразований используем формулу приведения и формулу преобразования произведения косинусов в сумму.

$$\frac{5 \sin 74^\circ}{\cos 37^\circ \cos 53^\circ} = \frac{5 \sin(90^\circ - 16^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 90^\circ + \cos 16^\circ)} = \frac{5 \cos 16^\circ}{\frac{1}{2} \cos 16^\circ} = 10.$$

Ответ: 10 .

Пример № 5. Найдите значение выражения:

$4tg(-3\pi - \gamma) - 3tg\gamma$, если $tg\gamma = 2$.

Решение:

Для преобразований используем формулу приведения.

$$4tg(-3\pi - \gamma) - 3tg\gamma = -4tg\gamma - 3tg\gamma = -7tg\gamma = -7 \cdot 2 = -14.$$

Ответ: -14 .

Пример № 6

Найдите значение выражения: $\frac{3 \sin(\alpha - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\alpha - \pi)}$.

Решение:

Для преобразований используем формулы приведения.

$$\frac{3\sin(\alpha - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\alpha - \pi)} = \frac{-3\sin(\pi - \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{-\sin(\pi - \alpha)} =$$
$$= \frac{-3\sin\alpha + \sin\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{-2\sin\alpha}{-\sin\alpha} = 2.$$

Ответ: 2.

1.4.5. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования

При упрощении выражений, содержащих логарифмы, применяются следующие правила:

1. Десятичные дроби представьте в виде обыкновенных.
2. Смешанные числа представьте в виде неправильных дробей.
3. Числа, стоящие в основании логарифма и под знаком логарифма, разложите на простые множители.
4. Если возможно, то приведите все логарифмы к одному основанию.
5. Примените свойства логарифмов.

Математическая операция логарифмирования является обратной по отношению к операции возведения в степень, поэтому свойства логарифмов тесно связаны со свойствами степени.

Основные свойства логарифмов

($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$):

- | | |
|--|---|
| 1. $\log_a a = 1$. | 5. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$. |
| 2. $\log_a 1 = 0$. | 6. $\log_a b^k = k \log_a b$. |
| 3. $a^{\log_a b} = b$. | 7. $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{\log_a b}{m}$. |
| 4. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$. | 8. $\log_{a^m} b^k = \frac{k}{m} \log_a b$. |

Следующая группа формул позволяет перейти от логарифма с данным основанием к логарифму с произвольным основанием и называется **формулами перехода к новому основанию**:

$$9. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \quad 10. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad b \neq 1.$$

Следствие из свойства (10):

$$11. \log_a b \cdot \log_b a = 1. \quad 12. a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$$

Выполним преобразование выражений, используя свойства логарифмов.

Пример № 1

Найдите значение выражения: $\log_5 0,2 + \log_{0,5} 16$.

Решение: запишем десятичные дроби в виде обыкновенных и вынесем степени за знак логарифма:

$$\log_5 0,2 + \log_{0,5} 16 = \log_5 \frac{1}{5} + \log_{\frac{1}{2}} 16 = -\log_5 5 - \log_2 16 = -1 - 4 = -5.$$

Ответ: -5 .

Пример № 2

Найдите значение выражения: $\log_5 9 \log_3 125$.

Решение: запишем десятичные дроби в виде обыкновенных и вынесем степени за знак логарифма:

$$\begin{aligned} \log_5 9 \cdot \log_3 125 &= \log_5 3^2 \cdot \log_3 5^3 = 2 \log_5 3 \cdot 3 \cdot \log_3 5 = \\ &= 6 \cdot (\log_5 3 \cdot \log_3 5) = 6 \cdot 1 = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 6 .

Пример № 3

Найдите значение выражения: $2^{\log_{\sqrt{2}} 2,5} - 7^{\log_{343} (7,25)^3} + 3^{4 \log_9 2,5}$.

Решение: упростим все показатели степеней: приведем их к логарифмам, в основании которых стоит то же число, что и в основании степени.

$$\begin{aligned} 1) \quad 2^{\log_{\sqrt{2}} 2,5} &= 2^{2 \log_2 2,5} = 2^{\log_2 2,5^2} = 6,25; \\ 2) \quad 7^{\log_{343} (7,25)^3} &= 7^{\log_{7^3} (7,25)^3} = 7^{\frac{1}{3} \log_7 (7,25)^3} = 7^{\log_7 (7,25)^1} = 7,25; \end{aligned}$$

$$3) \quad 3^{4\log_9 2,5} = 3^{2^{\log_3 2,5}} = 3^{\log_3 2,5^2} = 6,25;$$

$$4) \quad 6,25 - 7,25 + 6,25 = 5,25.$$

Ответ: 5,25.

Пример № 4

Найдите значение выражения: $\frac{\log_6 30}{\log_{30} 6} - \frac{\log_6 180}{\log_5 6}$.

Решение:

1) Приведем все логарифмы к основанию 6:

$$\log_6 30 \cdot \log_6 30 - \log_6 180 \cdot \log_6 5.$$

2) Разложим числа, стоящие под знаком логарифма на простые множители:

$$\log_6 (5 \cdot 6) \cdot \log_6 (5 \cdot 6) - \log_6 (5 \cdot 6^2) \cdot \log_6 5.$$

3) Применим свойства логарифмов:

$$(\log_6 5 + \log_6 6) \cdot (\log_6 5 + \log_6 6) - (\log_6 5 + 2\log_6 6) \cdot \log_6 5 = \\ = (\log_6 5 + 1) \cdot (\log_6 5 + 1) - (\log_6 5 + 2) \cdot \log_6 5.$$

4) Раскроем скобки:

$$\log_6^2 5 + 2\log_6 5 + 1 - 2\log_6 5 - \log_6^2 5 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример № 5

Найдите значение выражения: $\log_a (ab^{10})$, если $\log_a b = 17$.

Решение:

Выполним преобразования, используя свойства логарифмов:

$$\log_a (ab^{10}) = \log_a a + \log_a b^{10} = 1 + 10 \log_a b = 1 + 10 \cdot 17 = 171.$$

Ответ: 171.

1.4.6. Модуль (абсолютная величина) числа

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа x называется неотрицательное число $|x|$, определяемое соотношением

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Например, $|17| = 17$, так как $17 \geq 0$;

$|-17| = 17$, так как $-17 < 0$;

$|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, так как $\sqrt{5} - 2 \geq 0$;

$|\sqrt{11} - 9| = 9 - \sqrt{11}$, так как $\sqrt{11} - 9 < 0$.

Свойства модуля:

1. $|a| \geq 0$.
2. $|a| \geq a$.
3. $|-a| = |a|$.
4. $|ab| = |a| \cdot |b|$ (модуль произведения чисел равен произведению модулей этих чисел).
5. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ (модуль частного двух чисел (если делитель отличен от нуля) равен частному модулей этих чисел).
6. $|a|^2 = a^2$.
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (модуль суммы двух действительных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел).
8. $|a - b| \geq |a| - |b|$ (модуль разности двух действительных чисел больше или равен разности модулей этих чисел).
9. Неравенства $|x| \leq a$ и $-a \leq x \leq a$ равносильны.

Геометрически $|x|$ означает расстояние на координатной прямой от начала отсчета до точки, изображающей число x .

2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Уравнения

Уравнением называется равенство, содержащее переменную.

Решением уравнения с неизвестным x называют число x_0 , при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство. Решить уравнение — это значит найти все его решения или показать, что их нет.

Решение любого уравнения сводится к стандартному виду. Путем преобразований линейные уравнения сводят к виду $ax=b$, квадратные — к виду $ax^2+bx+c=0$.

Необходимость классификации уравнений вызывается невозможностью найти общий метод их решения. Известно, что целые алгебраические уравнения со времен Декарта классифицируются по степени уравнения. Чем выше степень таких уравнений, тем сложнее взаимная связь переменной с коэффициентами уравнения и тем труднее выразить эту переменную через коэффициенты.

2.1.1. Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — заданные числа, а x — неизвестная величина.

Коэффициенты a, b, c квадратного уравнения обычно называют так:

a — первый или старший коэффициент, $a \neq 0$,

b — второй коэффициент,

c — свободный член.

Например, в уравнении $2x^2-5x+3=0$ старший коэффициент 2, второй коэффициент -5 , свободный член 3.

Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Неполные квадратные уравнения имеют следующий вид:

1) $ax^2=0$, где $a \neq 0, b=0, c=0$;

2) $ax^2+c=0$, где $a \neq 0, b=0, c \neq 0$;

3) $ax^2+bx=0$, где $a \neq 0, b \neq 0, c=0$.

Уравнение $x^2=m$, где $m>0$, имеет два корня:

$$x_1 = \sqrt{m}, \quad x_2 = -\sqrt{m}.$$

Например, уравнение $x^2 = \frac{7}{9}$ имеет два корня:

$$x_1 = \sqrt{\frac{7}{9}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{7}{9}}.$$

Обычно записывают $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{7}{9}}$ или $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Уравнение $x^2 = m$, где $m = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.

Например, уравнение $2x^2 = 0$, имеет единственный корень $x = 0$.

Уравнение $x^2 = m$, где $m < 0$, не имеет действительных корней.

Например, уравнение $x^2 = -16$ не имеет действительных корней.

Решение полных квадратных уравнений

Рассмотрим квадратное уравнение общего вида

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом и обозначают буквой D .

$$D = b^2 - 4ac$$

1. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

2. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственный корень, который находится по формуле $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, которые находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Формулу $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ называют формулой корней квадрат-

ного уравнения общего вида.

Эту формулу можно записать в виде:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Рассмотрим примеры решения квадратных уравнений:

1. Решить уравнение $3x^2 + 5x + 7 = 0$.

Решение:

$$a = 3, b = 5, c = 7,$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -59,$$

$D < 0 \Rightarrow$ действительных корней нет.

Ответ: решений нет.

2. Решить уравнение $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Решение:

$$a=9, b=6, c=1,$$

$$D=(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0,$$

$D=0 \Rightarrow$ уравнение имеет единственное решение.

$$x = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

3. Решить уравнение $6x^2 + x - 2 = 0$.

Решение:

$$a=6, b=1, c=-2,$$

$$D=1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49,$$

$D > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет два различных корня.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm 7}{12},$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}$.

Приведенное квадратное уравнение.

Теорема Виета

Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется **приведенным**. В этом уравнении старший коэффициент равен единице.

Например, уравнение вида $x^2 - 5x + 0,3 = 0$ является приведенным.

Если в приведенном квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ коэффициент p является четным числом, то его корни уравнения

удобно находить по формуле $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Например, решить уравнение $x^2 + 12x + 3 = 0$.

Решение:

По формуле $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ находим:

$$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{(6)^2 - 3} = -6 \pm \sqrt{33}.$$

Ответ: $-6 \pm \sqrt{33}$.

Для приведенного квадратного уравнения справедлива **теорема Виета**:

Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то справедливы формулы:

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

То есть, если приведенное квадратное уравнение имеет корни, то сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Рассмотрим уравнение $x^2 - 7x - 15 = 0$.

Это уравнение имеет иррациональные корни, так как

$$D = 49 + 60 = 109.$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{109}}{2}.$$

Но, применяя теорему Виета, легко найти сумму и произведение корней уравнения:

$$x_1 + x_2 = 7,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -15.$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с дискриминантом $D \geq 0$ можно разложить на множители по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Например, разложить квадратный трехчлен $5x^2 + 12x - 17$ на множители.

Решение:

$$D = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-17) = 144 + 340 = 484.$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{484}}{2 \cdot 5} = \frac{-12 \pm 22}{10}.$$

$$x_1 = -\frac{17}{5}, x_2 = 1.$$

По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ получим:

$$5x^2 + 12x - 17 = 5\left(x + \frac{17}{5}\right)(x - 1) = (5x + 17)(x - 1)$$

Ответ: $(5x + 17)(x - 1)$.

2.1.2. Рациональные уравнения

Если выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, составлены лишь с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень, то уравнение называется **рациональным**.

На едином государственном экзамене решение задач с прикладным содержанием сводится к решению рациональных уравнений.

Рассмотрим задачу.

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см.

Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$.

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение:

Поскольку $f = 30$ имеем: $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30}$, тогда $\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$.

Наименьшему возможному d_1 значению соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2 . Поэтому $d_2 = 180$, откуда

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180};$$

$$\frac{1}{d_1} = \frac{5}{180};$$

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{36};$$

$$d_1 = 36.$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение $d_1 = 36$ см удовлетворяет условию.

Ответ: 36.

Рациональное уравнение называется *целым*, или *алгебраическим*, если в нем нет деления на выражение, содержащее x . К целым уравнениям относятся, например, линейные и квадратные уравнения.

Если в рациональном уравнении есть деление на выражение, содержащее x , то уравнение называется *дробно-рациональным*.

Например, уравнение $\frac{3x^3 - 7x}{x^2 - 4} = 0$ является дробно-рациональным.

Уравнение $\frac{2x-3}{x-1} - \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x^2-3x+2}$ возможно привести к

дробно-рациональному, преобразовав исходное уравнение: перенести все дроби в левую часть, привести слагаемые к общему знаменателю.

Решение дробно-рационального уравнения сводится в конечном итоге к замене исходного уравнения целым уравнением, которое равносильно исходному уравнению или является его следствием.

При решении дробного уравнения целесообразно поступать следующим образом:

- 1) определить область допустимых значений переменной x (ОДЗ);
- 2) найти наименьший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- 3) умножить обе части уравнения на общий знаменатель и привести подобные;
- 4) решить получившееся целое уравнение.

Описанные преобразования не сужают ОДЗ переменной x , но могут ее расширить. Следовательно, в результате указанных преобразований возможно появление посторонних корней (но не их потеря). Получив решение преобразованного уравнения, следует отбросить те его корни, которые обращают в ноль общий знаменатель исходного уравнения.

Область определения необходимо находить до преобразования и возможного сокращения дробей!

Пример № 1

Решить уравнение
$$\frac{51-x^2}{9-x^2} + \frac{x+7}{x-3} = 2 + \frac{4-x}{x+3}.$$

Решение:

Найдем ОДЗ уравнения. Поскольку знаменатели дробей не могут обращаться в ноль, то $x \neq \pm 3$.

$$\frac{51-x^2}{9-x^2} + \frac{x+7}{x-3} = 2 + \frac{4-x}{x+3},$$

$$\frac{51-x^2}{-(x-3)(3+x)} + \frac{x+7}{x-3} - 2 - \frac{4-x}{x+3} = 0,$$

$$\frac{-51 + x^2 + (x+7)(x+3) - 2(x^2-9) - (4-x)(x+3)}{x^2-9} = 0.$$

Раскроем скобки в числителе и приведем подобные. Мы получим уравнение:

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = 0.$$

$$\text{Тогда } x^2 + 3x = 0.$$

Решим неполное квадратное уравнение:

$$x(x+3)=0.$$

$$x_1=0, x_2=-3.$$

Значение $x_2=-3$ не входит в ОДЗ исходного уравнения. Единственный корень уравнения есть $x=0$.

Ответ: $x=0$.

Метод замены переменной

В ряде случаев решение уравнения можно упростить введением новой переменной (нового неизвестного).

Например, уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a \neq 0$ называется **биквадратным**.

Биквадратные уравнения решаются введением новой переменной $t=x^2$.

Пример № 2. Решить уравнение $4x^4-11x^2-45=0$.

Решение:

Пусть $t=x^2$, тогда $4t^2-11t-45=0$.

$$D=b^2-4ac,$$

$$D=121-4 \cdot 4 \cdot (-45)=841,$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{841}}{2 \cdot 4},$$

$$t_1 = \frac{11-29}{8} = -\frac{18}{8} = -\frac{9}{4}; \quad t_2 = \frac{11+29}{8} = \frac{40}{8} = 5.$$

$$\text{Тогда } x^2 = -\frac{9}{4} \text{ или } x^2=5.$$

Решений нет, так как $-\frac{9}{4} < 0$. $x = \pm\sqrt{5}$.

Ответ: $x = \pm\sqrt{5}$.

Метод замены используют не только при решении биквадратных уравнений.

Пример № 3

Решить уравнение $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$.

Решение:

Пусть $t=x^2+3x+1$, тогда $x^2+3x+3=t+2$, и исходное уравнение сводится к уравнению:

$$t(t+2)+1=0,$$

$$t^2+2t+1=0,$$

$$(t+1)^2=0,$$

$$t=-1.$$

Следовательно, $x^2+3x+1=-1$.

$$x^2+3x+2=0$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=9-8=1$$

$$x_1=-2, x_2=-1$$

Ответ: $x_1=-2, x_2=-1$.

Пример № 4

Решить уравнение $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$.

Решение:

1. ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x^2+x-5 \neq 0; \end{cases}$

$$x^2+x-5 \neq 0,$$

$$D=1+4 \cdot 5=21,$$

$$x_1 \neq \frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \quad x_2 \neq \frac{-1+\sqrt{21}}{2}.$$

2. Пусть $t = \frac{x^2+x-5}{x}$, тогда $\frac{3x}{x^2+x-5} = \frac{3}{t}$, и исходное

уравнение сводится к уравнению:

$$t + \frac{3}{t} + 4 = 0,$$

$$t^2 + 4t + 3 = 0,$$

$$t_1 = -1, t_2 = -3.$$

$$3. \quad t_1 = -1, \text{ тогда } \frac{x^2 + x - 5}{x} = -1.$$

$$x^2 + 2x - 5 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 5 = 6,$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{6}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{6}.$$

$$4. \quad t_2 = -3, \text{ тогда } \frac{x^2 + x - 5}{x} = -3.$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 2^2 + 5 = 9,$$

$$x_3 = -2 - 3 = -5, \quad x_4 = -2 + 3 = 1.$$

$$\text{Ответ: } -5, \quad -1 - \sqrt{6}, \quad 1, \quad -1 + \sqrt{6}.$$

Метод разложения на множители

Пусть нужно решить уравнение

$$f(x) = 0 \text{ и } f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x).$$

Тогда уравнение $f(x) = 0$ можно заменить совокупностью простых уравнений:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \dots, \quad f_n(x) = 0.$$

Найдя корни уравнений этой совокупности и отобрав из них те, которые принадлежат области допустимых значений исходного уравнения, мы получим корни уравнения $f(x) = 0$.

Пример № 5. Решить уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Решение:

Представим слагаемое $7x$ в виде суммы $x + 6x$.

$$x^3 - x - 6x + 6 = 0.$$

$$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0,$$

$$x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = 0,$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0,$$

$$x - 1 = 0, \quad x^2 + x - 6 = 0,$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 1, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2.$$

Симметрические уравнения третьей степени

Уравнения называются **симметрическими уравнениями третьей степени**, если они имеют вид $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$.

Для того чтобы успешно решать уравнения такого вида, нужно знать и уметь использовать следующие простейшие свойства возвратных уравнений:

1. У любого возвратного уравнения нечетной степени всегда есть корень, равный -1 .

Действительно, если сгруппировать в левой части слагаемые следующим образом: $a(x^3 + 1) + b(x + 1) = 0$, то есть возможность вынести общий множитель за скобки, получим уравнение:

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + b(x + 1) = 0;$$

$$(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0;$$

поэтому, $x + 1 = 0$ или $ax^2 + (b - a)x + a = 0$, первое уравнение и дает корень, равный -1 .

2. У возвратного уравнения корней, равных нулю, нет.

3. При делении многочлена нечетной степени на $(x + 1)$ частное является снова возвратным многочленом.

Пример № 6. Решить уравнение $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение:

У исходного уравнения обязательно есть корень $x = -1$, поэтому исходный многочлен раскладывается на множители:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Квадратное уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ не имеет корней.

Ответ: -1 .

Возвратные уравнения четвертой степени

Уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, где все коэффициенты отличны от нуля, называются **возвратными уравнениями** (первые два коэффициента a и b как бы возвращаются в последних двух членах уравнения).

Алгоритм решения возвратных уравнений таков:

1. Разделить обе части исходного уравнения на x^2 . Это действие не приведет к потере корня, так как $x=0$ решением заданного уравнения не является.
2. С помощью группировки привести уравнение к виду:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

3. Ввести новую неизвестную: $t = x + \frac{1}{x}$.

$$\text{Тогда } t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Выразим } x^2 + \frac{1}{x^2}, \text{ получим } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

4. Решить в новых переменных полученное квадратное уравнение: $at^2 + bt + c - 2a = 0$.
5. Сделать обратную подстановку.

Таким образом, решение возвратного уравнения четвертой степени сводится к решению квадратного уравнения.

Уравнение вида $ax^4+bx^3+cx^2+kbx+k^2a=0$, где все коэффициенты отличны от нуля, также называется **возвратным уравнением**. С помощью введения новой переменной: $t = x + \frac{k}{x}$ его также можно привести к квадратному уравнению:

$$t^2 = \left(x + \frac{k}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{k}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2k + \frac{k^2}{x^2}.$$

$$\text{Выразим } x^2 + \frac{k^2}{x^2}, \text{ получим } x^2 + \frac{k^2}{x^2} = t^2 - 2k.$$

Таким образом, исходное уравнение принимает вид

$$a(t^2 - 2k) + bt + c = 0.$$

Пример № 7

Решить уравнение $9x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 3x + 1 = 0$.

Решение:

1. Разделим обе части исходного уравнения на x^2 . Это действие не приведет к потере корня, так как $x=0$ решением заданного уравнения не является:

$$9x^2 - 9x + 10 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

2. С помощью группировки приведем уравнение к виду:

$$\left(9x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3 \cdot \left(3x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0.$$

3. Введем новую переменную: $t = 3x + \frac{1}{x}$.

$$\text{Тогда } (3x)^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \cdot 3 = t^2 - 6.$$

4. Решим в новых переменных полученное квадратное уравнение:

$$t^2 - 6 - 3t + 10 = 0;$$

$$t^2 - 3t + 4 = 0;$$

$$D = 9 - 16 = -7, D < 0 \Rightarrow \text{корней нет.}$$

Ответ: корней нет.

2.1.3. Иррациональные уравнения

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются **иррациональными**.

Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению **путем возведения в степень обеих частей уравнения или замены переменной**. Иногда применяют также различные искусственные приемы.

При решении иррациональных уравнений методом возведения обеих частей в четную степень могут появиться посторонние (лишние) корни. Причиной появления посторонних корней, помимо возведения обеих частей в четную степень, может быть также какая-либо замена (неэквивалентное преобразование),

выполняемая, например, в ходе решения уравнения, содержащего кубические корни.

Приступая к решению иррационального уравнения, содержащего четные степени корней, полезно находить область допустимых значений (ОДЗ) переменной, это может облегчить решение исходного уравнения.

Найденные при решении уравнения значения переменной, которые не принадлежат ОДЗ, являются посторонними.

При возведении в четную степень неверное равенство может дать верное равенство. В самом деле, неверное равенство $-1 = 1$ при возведении в четную степень, например в квадрат, дает верное равенство:

$$\begin{aligned}(-1)^2 &= 1; \\ 1 &= 1.\end{aligned}$$

Поэтому при решении иррациональных уравнений после получения корней **лучше всегда делать проверку!**

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень

Пример № 1. Решить уравнение $\sqrt{x-1} = x-3$.

Решение:

1. ОДЗ: $x \geq 0$.
2. Возведя в квадрат обе части уравнения, получим:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x-1})^2 &= (x-3)^2, \\ x-1 &= x^2 - 6x + 9.\end{aligned}$$

После преобразований приходим к квадратному уравнению:
 $x^2 - 7x + 10 = 0$.

$x_1 = 2$, $x_2 = 5$, оба корня принадлежат области допустимых значений.

Проверим, являются ли найденные числа решениями данного уравнения.

Проверка:

1. При подстановке числа 2 получаем в правой части 1, а в левой части число -1 :

$$\begin{aligned}x_1 &= 2, \\ \sqrt{2-1} &= 2-3, \\ 1 &\neq -1.\end{aligned}$$

Следовательно, 2 не является решением уравнения; говорят, что это посторонний корень, полученный в результате принятого способа решения.

Вывод: $x_1 = 2$ — посторонний корень.

2. При подстановке в исходное уравнение числа 5 получим верное равенство:

$$\begin{aligned}x_2 &= 5, \\ \sqrt{5-1} &= 5-3,\end{aligned}$$

$2=2$, следовательно, $x_2 = 5$ является корнем уравнения.

Ответ: 5.

При решении иррационального уравнения вида

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ можно использовать следующее правило:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пример № 2. Решить уравнение $\sqrt{x-2} = 8-x$.

Решение:

$$\begin{aligned}&\begin{cases} x-2 = (8-x)^2, \\ 8-x \geq 0; \end{cases} \\&\begin{cases} x-2 = x^2 - 16x + 64, \\ x \leq 8; \end{cases} \\&\begin{cases} x^2 - 17x + 66 = 0, \\ x \leq 8; \end{cases} \\&\begin{cases} x_1 = 6, \quad x_2 = 11, \\ x \leq 8; \end{cases} \\&x = 6.\end{aligned}$$

Ответ: 6.

Пример № 3

Решить уравнение $\sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 3} = \sqrt{4x - 3}$.

Решение:

Возведем обе части исходного уравнения в квадрат, получим:

$$x^3 - 2x^2 - x + 3 = 4x - 3,$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$x^3 - x^2 - x^2 + x - 6x + 6 = 0,$$

$$x^2(x-1) - x(x-1) - 6(x-1) = 0,$$

$$(x-1)(x^2 - x - 6) = 0,$$

$$x-1=0 \text{ или } x^2-x-6=0,$$

$$x_1=1, \quad x_2=-2, \quad x_3=3.$$

Проверка:

1. $x_1=1,$

$$\sqrt{1-2-1+3} = \sqrt{4-3}.$$

$1=1$, следовательно, $x_1=1$ является корнем исходного уравнения.

2) $x_2=-2,$

$$\sqrt{-8-8+2+3} = \sqrt{-8-3}.$$

$\sqrt{-11} = \sqrt{-11}$ не имеет смысла, так как $-11 < 0$, следовательно, $x_2=-2$ является посторонним корнем.

3) $x_3=3,$

$$\sqrt{27-18-3+3} = \sqrt{12-3}.$$

$3=3$, следовательно, $x_3=3$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 1; 3.

Пример № 4. Решить уравнение $\sqrt[6]{x-20} = 2$.

Решение:

В отличие от рассмотренных ранее примеров данное иррациональное уравнение содержит не квадратный корень, а корень шестой степени. Поэтому для того, чтобы «избавиться от радикала», надо возвести обе части уравнения не в квадрат, а в шестую степень:

$$\begin{aligned}x - 20 &= 2^6, \\x &= 2^6 + 20, \\x &= 64 + 20, \\x &= 84.\end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}x &= 84, \\\sqrt[6]{84 - 20} &= 2, \\\sqrt[6]{64} &= 2.\end{aligned}$$

$2=2$, следовательно, $x = 84$ является корнем уравнения.

Ответ: 84.

Метод замены переменной при решении иррациональных уравнений (метод введения новой переменной)

Новая переменная в уравнениях иногда очевидна, иногда несколько завуалирована, иногда ее можно выявить лишь в процессе преобразований. В некоторых случаях полезно ввести не одну, а две новые переменные. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более простой и прозрачной.

Пример № 5. Решить уравнение $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 10$.

Решение:

Возведение данного уравнения в квадрат привело бы к уравнению четвертой степени, что нерационально.

Поэтому запишем уравнение в виде

$$x^2 + 3x - 5 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 5$$

и введем новую переменную: $y = \sqrt{x^2 + 3x - 5}$, $y \geq 0$.

$$y^2 + 4y - 5 = 0,$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -5.$$

Сделаем обратную замену переменной:

$$\begin{aligned}1. \quad y &= 1 \\ \sqrt{x^2 + 3x - 5} &= 1, \\ x^2 + 3x - 5 &= 1, \\ x^2 + 3x - 6 &= 0,\end{aligned}$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 33,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

$$2. \quad y = -5, \\ \sqrt{x^2 + 3x - 5} = -51.$$

Решений нет, так как $-51 < 0$.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}.$$

Пример № 6. Решить уравнение $\sqrt{x+5} + \sqrt[4]{x+5} = 12$.

Решение:

Введем новую переменную: $y = \sqrt[4]{x+5}$, $y \geq 0$,

тогда уравнение примет вид:

$$y^2 + y - 12 = 0,$$

$$y_1 = -4, \quad y_2 = 3.$$

Сделаем обратную замену переменной:

$$1. \quad y = -4, \\ \sqrt[4]{x+5} = -4$$

Решений нет, так как $-4 < 0$.

$$2. \quad y = 3, \\ \sqrt[4]{x+5} = 3, \\ x+5 = 3^4, \\ x = 81-5, \\ x = 76.$$

Ответ: 76.

2.1.4. Тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

Отличительная особенность тригонометрических уравнений — бесконечное множество корней. Эта особенность связана с характерным свойством тригонометрических функций — периодичностью. Решить уравнение — это значит найти все его решения или показать, что их нет.

Решение тригонометрических уравнений выполняется в большинстве случаев путем сведения их с помощью различных преобразований к простейшим тригонометрическим уравнениям.

Уравнение $f(x) = a$, где a — данное число, а $f(x)$ — одна из основных тригонометрических функций, называют простейшим тригонометрическим уравнением.

Простейшие тригонометрические уравнения — это уравнения вида:

$$\sin x = a$$

$$\cos x = a$$

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

Решить простейшее тригонометрическое уравнение — значит найти множество всех углов, имеющих данное значение a тригонометрической функции или показать, что таких углов нет.

Если тригонометрическое уравнение не является простейшим, то с помощью тождественных преобразований его нужно свести к одному или нескольким простейшим, решение которых определяется стандартными формулами.

Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

Арксинус

Для решения простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$ вводится понятие арксинус числа a .

То есть, если $\sin x = a$, то $x = \arcsin a$.

Арксинусом числа a ($-1 \leq a \leq 1$) называется такое число x из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Геометрически $\arcsin a$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Табличные значения

| α | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---------------|------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|---|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| | -90° | -60° | -45° | -30° | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° |
| $\sin \alpha$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

Тогда:

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Арккосинус

Для решения простейшего тригонометрического уравнения $\cos x = a$ вводится понятие арккосинуса числа a .

То есть, если $\cos x = a$, то $x = \arccos a$.

Арккосинусом числа a ($-1 \leq a \leq 1$) называется такое число x из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Геометрически $\arccos a$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Табличные значения

| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
|---------------|---|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |

Тогда:

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arccos 1 = 0$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

Арктангенс

Для решения простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} x = a$ вводится понятие арктангенса числа a .

То есть, если $\operatorname{tg} x = a$, то $x = \operatorname{arctg} a$.

Арктангенсом числа a называется такое число x из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

Геометрически $\operatorname{arctg} a$ означает величину угла (дуги), заключенного в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

Табличные значения

| α | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------------|---|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | -90° | -60° | -45° | -30° | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° |
| tga | — | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — |

Тогда:

$$\operatorname{arctg} 0 = 0$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Арккотангенс

Для решения простейшего тригонометрического уравнения $ctgx = a$ вводится понятие арккотангенса числа a .

То есть, если $ctgx = a$, то $x = arcctga$.

Арккотангенсом числа a называется такое число x из интервала $(0; \pi)$, тангенс которого равен a .

Геометрически $arcctga$ означает величину угла (дуги), заключенного в интервале $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

Табличные значения

| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
|----------|---|-----------------|-----------------|----------------------|-----------------|-----------------------|------------------|------------------|-------|
| | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
| $ctga$ | — | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | — |

Тогда:

$$arcctg 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$arcctg (-1) = \frac{3\pi}{4}$$

$$arcctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$arcctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$arcctg (-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$$

$$arcctg \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$arcctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

Не табличное значение «аркфункций» можно найти, используя калькулятор.

Рассмотрим, при каких значениях a простейшие тригонометрические уравнения имеют решения и как находить все решения таких уравнений.

Решение уравнения $\sin x = a$.

Так как $|\sin x| \leq 1$, то уравнение $\sin x = a$ имеет решение только при $|a| \leq 1$.

И тогда решение данного уравнения находится по формуле:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Соответственно, если $|a| > 1$, то уравнение не имеет действительных корней.

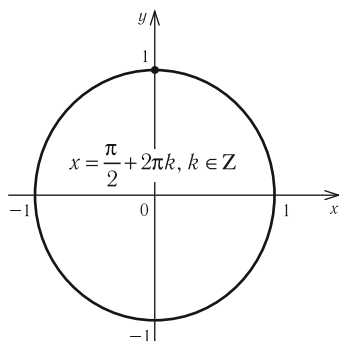
Например, уравнение $\sin x = \sqrt{7}$ не имеет решений, так $\sqrt{7} > 1$.

Если $a = -1; 0; 1$, то рассматривают частные случаи решения данного уравнения.

Частные случаи

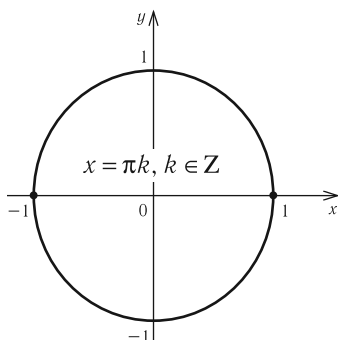
1. $\sin x = 1$,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$



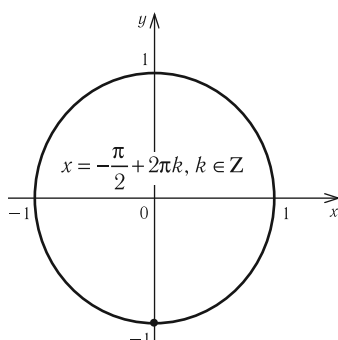
2. $\sin x = 0$,

$$x = \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$



3. $\sin x = -1$,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$



Решение уравнения $\cos x = a$.

Так как $|\cos x| \leq 1$, то уравнение $\cos x = a$ имеет решение только при $|a| \leq 1$.

Общий вид решений уравнения $\cos x = a$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

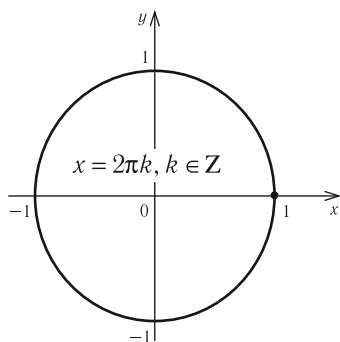
Соответственно, если $|a| > 1$, то уравнение не имеет действительных корней.

Если $a = -1; 0; 1$, то рассматривают частные случаи решения уравнения $\cos x = a$.

Частные случаи

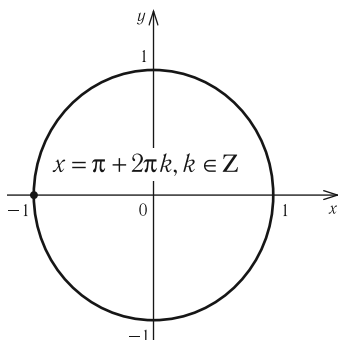
1. $\cos x = 1$,

$$x = 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$



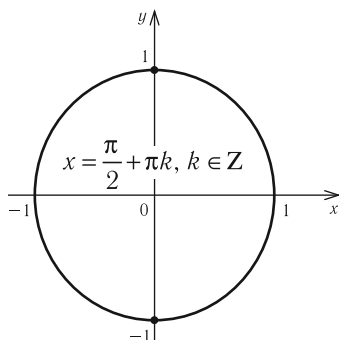
2. $\cos x = -1$,

$$x = \pi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$



3. $\cos x = 0$,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$



Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

Данные уравнения имеют решения при любом значении $a \in (-\infty; +\infty)$.

Общий вид решения уравнений

| | |
|---|---|
| $\operatorname{tg} x = a$ $x = \arctg a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | $\operatorname{ctg} x = a$ $x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
|---|---|

Частные случаи для $\operatorname{tg} x = a$

| | | |
|--|--|--|
| $\operatorname{tg} x = 0$ $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | $\operatorname{tg} x = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | $\operatorname{tg} x = -1$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
|--|--|--|

Частные случаи для $\operatorname{ctg} x = a$

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{ctg} x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | $\operatorname{ctg} x = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ | $\operatorname{ctg} x = -1$ $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
|---|---|---|

Ряд уравнений путем элементарных преобразований: перенос слагаемых из одной части уравнения в другую, деление обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от нуля, — также очень легко сводятся к простейшим.

Сведение тригонометрических уравнений к простейшим тригонометрическим уравнениям выполняется различными способами. Первоначально надо рассмотреть тригонометрические уравнения, в которых под знаком тригонометрических функций стоит более сложное выражение, зависящее от x . Для решения таких уравнений можно обозначить выражение, стоящее под знаком тригонометрической функции, одной буквой; решить простейшее тригонометрическое уравнение, а потом найти x , решая алгебраическое уравнение.

Пример № 1. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение:

$$\cos x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример № 2. Решить уравнение $2\sin x - \sqrt{2} = 0$.

Решение:

$$2\sin x - \sqrt{2} = 0,$$

$$2\sin x = \sqrt{2},$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример № 3. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4}\right) = 1$.

Решение:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4}\right) = 1.$$

Воспользуемся формулой приведения $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$:

$$-\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}\right) = 1,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}\right) = -1,$$

$$\frac{x}{4} = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = 3\pi + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 3\pi + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример № 4. Решить уравнение $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 3.$

Решение:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 3,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3},$$

$$\frac{t}{3} + \frac{\pi}{3} = \arctg \sqrt{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{t}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{t}{3} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t = 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $t = 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Методы решения тригонометрических уравнений

Для решения тригонометрических уравнений чаще всего используется два метода: введения новой переменной и разложения на множители.

Одним из самых общих методов решения тригонометрических уравнений является сведение тригонометрического уравнения к алгебраическому относительно одной тригонометрической функции с использованием тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Уравнения вида $\sin ax \pm \sin bx = 0$, $\cos ax \pm \cos bx = 0$ решаются заменой суммы (разности) синусов и косинусов произведением.

Часто, особенно при решении квадратного уравнения относительно одной из тригонометрических функций, используется метод введения новой переменной.

Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным

Сведение тригонометрического уравнения к алгебраическому относительно одной тригонометрической функции — один из самых общих методов решения тригонометрических уравнений. Рассмотрим уравнения, которые после введения новой переменной $t=f(x)$, где $f(x)$ — одна из основных тригонометрических функций, превращаются в квадратные.

К таким уравнениям можно отнести уравнения вида:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0, \quad a \cos^2 x + b \cos x + c = 0 \text{ и т. д.}$$

Пример № 5. Решить уравнение $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Решение:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Введем новую переменную: $t = \sin x$.

Тогда данное уравнение можно записать в виде: $2t^2 + t - 1 = 0$.

Это квадратное уравнение. Его корни: $t_1 = -1$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

Тогда $\sin x = -1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Решим каждое из получившихся простейших уравнений.

1. $\sin x = -1$,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. $\sin x = -\frac{1}{2}$,

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_k = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример № 6. Решить уравнение $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

Решение:

$$\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0.$$

Применим формулу: $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

$$\text{Тогда: } \operatorname{tg} x - 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0.$$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда $t - \frac{2}{t} + 1 = 0$,

$$t^2 + t - 2 = 0 \text{ (при условии } t \neq 0),$$

$$t_1 = 1, t_2 = -2.$$

1. Если $t = 1$, то $\operatorname{tg} x = 1$,

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Если $t = -2$, то $\operatorname{tg} x = -2$,

$$x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Однородные уравнения

Рассмотрим уравнения вида:

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cdot \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x + \dots + a_n \cdot \cos^n x = 0,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — действительные числа.

В каждом слагаемом этого уравнения сумма показателей степеней синуса и косинуса левой части уравнения одна и та же и равна n . Такое уравнение называется *однородным* относительно $\sin x$ и $\cos x$, а число n называют *показателем однородности*.

Рассмотрим решение однородных тригонометрических уравнений первой степени:

$$a \sin x + b \cos x = 0, \text{ где } a \neq 0, b \neq 0.$$

Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x \neq 0$, получим уравнение, равносильное данному:

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a},$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Необходимо помнить, что делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, если это выражение нигде не обращается в ноль (на 0 делить нельзя!).

Предположим, что $\cos x = 0$.

Тогда однородное уравнение $a \sin x + b \cos x = 0$ примет вид $a \sin x = 0$, то есть $\sin x = 0$ (ведь у нас коэффициент a отличен от нуля). Получается, что и $\cos x = 0$, и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ одновременно в ноль не обращаются.

Рассмотрим решение однородных тригонометрических уравнений второй степени.

При $n = 2$ имеем однородное уравнение вида:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Если коэффициент a отличен от нуля, т. е. в уравнении содержится член $\sin^2 x$ с каким-то коэффициентом, можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x \neq 0$.

Получим уравнение, равносильное данному уравнению:

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Далее решение уравнения сводится к решению квадратного уравнения относительно $\operatorname{tg} x$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$ коэффициент a равен 0, т. е. отсутствует член $\sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид: $b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$.

Это уравнение можно решить разложением на множители:

$$\cos x (b \sin x + c \cos x) = 0,$$

$$\text{тогда } \cos x = 0 \text{ или } b \sin x + c \cos x = 0.$$

Получились два уравнения, решения которых уже были рассмотрены.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c = 0$, т. е. когда однородное уравнение имеет вид $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x = 0$ (здесь можно вынести за скобки $\sin x$).

Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения второй степени $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$:

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a \sin^2 x$.
2. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (т. е. $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x \neq 0$ и последующим введением новой переменной $t = \operatorname{tg} x$.
3. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении не содержится (т. е. $a=0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\cos x$.

Некоторые уравнения, не являющиеся однородными, могут быть сведены к однородным после соответствующих преобразований.

Пример № 7. Решить уравнение $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

Решение:

$$\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1.$$

Применим основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0,$$

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0,$$

$$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0,$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \cos x - \sin x = 0,$$

$$x = \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z},$$

$$1 - \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Пример № 8. Решить уравнение $4 \sin^2 x - \sin 2x = 3$.

Решение:

$$4 \sin^2 x - \sin 2x = 3.$$

Применим формулы:

- синус двойного угла: $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$;
- основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Получим:

$$4 \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 3 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$4 \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - 3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 0,$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Это однородное уравнение второй степени.

Разделим его на $\cos^2 x \neq 0$.

$$tg^2 x - 2tgx - 3 = 0.$$

Пусть $tgx = t$, тогда: $t^2 - 2t - 3 = 0$.

$$t_1 = -1, t_2 = 3.$$

Если $t = -1$, то $tgx = -1$,

$$x = \arctg(-1) + \pi n, n \in Z,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Если $t = 3$, то $tgx = 3$,

$$x = \arctg 3 + \pi k, k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, x = \arctg 3 + \pi k, k \in Z.$$

Метод разложения на множители

Одним из наиболее часто применяемых методов решения тригонометрических уравнений является метод разложения на множители.

Суть метода состоит в следующем: если уравнение $f(x) = 0$ возможно преобразовать к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, то задача сводится к решению двух уравнений:

$$f_1(x) = 0; f_2(x) = 0.$$

Пример № 9. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

Решение:

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Перенесем все члены уравнения влево:

$$\sin x + \cos x - 1 = 0,$$

преобразуем левую часть уравнения, применяя формулы

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ и } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}:$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0,$$

разложим на множители выражение, стоящее в левой части уравнения:

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0,$$

$$2\sin\frac{x}{2}=0 \quad \text{или} \quad \cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0,$$

$$\frac{x}{2}=\pi k, \text{ где } k\in Z, \text{ разделим на } \cos x \neq 0,$$

$$x=2\pi k, \text{ где } k\in Z, \quad 1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n, \text{ где } n\in Z,$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \text{ где } n\in Z.$$

$$\text{Ответ: } x=2\pi k, \text{ где } k\in Z, \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \text{ где } n\in Z.$$

Пример № 10. Решить уравнение $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

Решение:

$$\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1,$$

$$\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x.$$

Преобразуем сумму тригонометрических функций в произведении:

$$2\cos 2x \cdot \cos 4x = 2\cos^2 4x,$$

$$2\cos 4x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0,$$

$$2\cos 4x \cdot 2\sin 3x \cdot \sin x = 0,$$

$$\cos 4x = 0,$$

$$\sin 3x = 0,$$

$$\sin x = 0.$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$3x = \pi k, k \in Z,$$

$$x = \pi m, m \in Z.$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z,$$

$$x = \pi m, m \in Z.$$

Заметим, что серия решений $x = \pi m, m \in Z$ входит в серию решений $x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z$.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z, \quad x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Пример № 9. Решить уравнение $2\sin 2x \cdot \sin 6x = \cos 4x$.

Решение:

$$2\sin 2x \cdot \sin 6x = \cos 4x.$$

Преобразуем левую часть в сумму:

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x,$$

$$\cos 8x = 0,$$

$$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$.

Рассмотрим уравнение вида:

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

где a, b, c — коэффициенты; x — неизвестная величина.

1. Уравнения такого вида можно решать при помощи **универсальной тригонометрической подстановки** $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, воспользовавшись формулами, выражающими $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Исходное уравнение сводится к дробно-рациональному алгебраическому уравнению, решение которого было рассмотрено ранее.

2. Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$ рациональнее решать **методом введения вспомогательного угла**: $\phi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$.

Рассмотрим ход решения уравнения путем эквивалентных преобразований левой части:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right).$$

Введем обозначения:

$$\sin \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Заметим, что выражение в скобках в этом случае преобразуется в косинус разности аргументов:

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \phi \sin x + \cos \phi \cos x) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi). \end{aligned}$$

Таким образом, исходное уравнение приводится к эквивалентному простейшему тригонометрическому уравнению:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi) = c,$$

$$\cos(x - \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$x - \phi = \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \phi \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \arctg \frac{a}{b} \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение решено в общем виде.

Отбор корней в тригонометрическом уравнении

В контрольно-измерительных вариантах единого государственного экзамена по математике в заданиях С1 нужно не просто решить тригонометрическое уравнение, а еще найти все корни, принадлежащие определенному отрезку.

Рассмотрим задание:

а) Решить уравнение $\cos 2x - \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -0,25$;

б) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Решение:

а) преобразуем уравнение (применим формулы приведения и формулу понижения степени):

$$\cos 2x - \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -0,25,$$

$$\cos 2x - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -0,25,$$

$$\cos 2x - \cos^2 x = -0,25,$$

$$\cos 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{4},$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

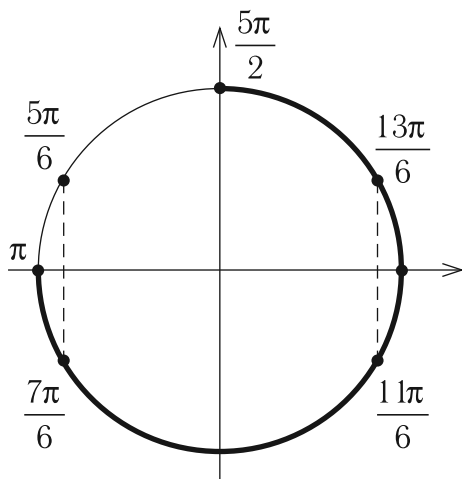
б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}.$$

Ответ:

$$\text{а) } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}.$$



2.1.5. Показательные уравнения

Уравнение, которое содержит неизвестное в показателе степени, называется **показательным уравнением**.

Самое простое показательное уравнение имеет вид:

$$a^x = b, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Утверждение 1

Уравнение $a^x = b$ имеет единственное решение $x = \log_a b$ при $b > 0$ и не имеет решений при $b \leq 0$.

Пример № 1. Решить уравнения: а) $2^x = -8$, б) $2^x = 8$, в) $2^x = 7$.

Решение:

а) $2^x = -8$.

Уравнение не имеет решений, так как левая часть уравнения положительна при любом значении x из множества действительных чисел (следует из свойств показательной функции), а правая часть есть отрицательное число.

Ответ: решений нет.

б) $2^x = 4$,
 $x = \log_2 4$,
 $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

в) $2^x = 7$,
 $x = \log_2 7$.

Ответ: $x = \log_2 7$.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное.

Это уравнение имеет единственный корень $x = b$.

Метод уравнивания показателей степеней

Утверждение 2

При $a > 0$, $a \neq 1$, уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$ равносильны.

Если в уравнении присутствуют показательные функции с разными основаниями, можно попытаться привести их к одному и тому же основанию.

Уравнение вида $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ можно переписать следующим образом:

$a^{f(x)} = a^{g(x) \log_a b}$ и решить, используя утверждение 2.

Пример № 2. Решить уравнение: $5^{x^2-2x-1} = 25$.

Решение:

$$5^{x^2-2x-1} = 25,$$

$$5^{x^2-2x-1} = 5^2,$$

$$x^2 - 2x - 1 = 2,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_1 = 3, x_2 = -1.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = -1$.

Пример № 3. Решить уравнение: $\frac{3^x}{2^x} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{3}{2}\right)^9$.

Решение:

$$\frac{3^x}{2^x} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{3}{2}\right)^9.$$

Выполним преобразования, используя свойства степеней:

$$\frac{3^x}{2^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x,$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{x^2-12} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x^2+24}.$$

Тогда получим уравнение:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x^2+24} = \left(\frac{3}{2}\right)^9,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2x^2+24} = \left(\frac{3}{2}\right)^9,$$

$$-2x^2 + x + 24 = 9,$$

$$-2x^2 + x + 15 = 0,$$

$$x_1 = 3, x_2 = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 3, x_2 = -\frac{5}{2}.$$

Пример № 4. Решить уравнение: $3^{2x-1} = 5^{x+1}$.

Решение:

$$3^{2x-1} = 5^{x+1},$$

$$3^{2x-1} = 3^{\log_3 5^{(x+1)}},$$

$$2x-1 = \log_3 5^{(x+1)},$$

$$2x-1 = (x+1) \cdot \log_3 5,$$

$$2x-1 = x \cdot \log_3 5 + \log_3 5,$$

$$2x - x \cdot \log_3 5 = 1 + \log_3 5,$$

$$x \cdot (2 - \log_3 5) = 1 + \log_3 5,$$

$$x = \frac{1 + \log_3 5}{2 - \log_3 5}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1 + \log_3 5}{2 - \log_3 5}.$$

Показательные уравнения, сводящиеся к квадратным методом введения новой переменной

Наиболее часто встречаются уравнения вида:

$$a \cdot z^{2f(x)} + b \cdot z^{f(x)} + c = 0 \text{ или } a \cdot z^{f(x)} + b + c \cdot z^{-f(x)} = 0,$$

где $a, b, c \in R$.

Данные уравнения с помощью подстановки $t = z^{f(x)}$ сводятся к уравнению

$$a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0.$$

Пример № 5. Решить уравнение: $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Решение:

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Пусть $t = 2^x$, тогда исходное уравнение примет вид:

$$t^2 - 5 \cdot t + 4 = 0,$$

$$t_1 = 1, t_2 = 4.$$

$$1) \quad t_1 = 1, \text{ тогда } 2^x = 1, \\ x = 0.$$

$$2) \quad t_2 = 4, \text{ тогда } 2^x = 4, \\ x = 2.$$

Ответ: 0; 2.

Уравнения вида $M\left(\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}\right)^x + N\left(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\right)^x = p$, где $a^2 - b = 1$, сводятся к квадратным уравнениям введением новой переменной $t = \left(\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}\right)^x$ или $t = \left(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\right)^x$.

Пример № 6

Решить уравнение: $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 6$.

Решение:

$$\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 6.$$

Заметим, что $(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8}) = 9-8=1$,

$$\text{тогда } \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x}.$$

Пусть $t = \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x$, тогда $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = \frac{1}{t}$,

исходное уравнение примет вид:

$$t^2 + \frac{1}{t} = 6,$$

$$t^2 - 6t + 1 = 0,$$

$$t_1 = 3 - \sqrt{8}, \quad t_2 = 3 + \sqrt{8}.$$

$$1) \quad t_1 = 3 - \sqrt{8}, \text{ тогда } \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 3 - \sqrt{8}, \\ \left(3 - \sqrt{8}\right)^{\frac{x}{3}} = 3 - \sqrt{8},$$

$$\frac{x}{3} = 1,$$

$$x = 3.$$

$$2) \quad t_2 = 3 + \sqrt{8}, \text{ тогда } \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 3 + \sqrt{8},$$

$$\left(3 - \sqrt{8}\right)^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3 - \sqrt{8}},$$

$$\frac{x}{3} = -1,$$

$$x = -3.$$

Ответ: 3, -3.

Решение уравнений вида

$a^{f(x)} = b^{f(x)}$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

Уравнения вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ решаются путем деления обеих частей уравнения на $a^{f(x)}$ или на $b^{f(x)}$.

Пример № 7. Решить уравнение: $6^{x+1} = 37^{x+1}$.

Решение:

$$6^{x+1} = 37^{x+1}.$$

Разделим обе части уравнения на 37^{x+1} , тогда исходное уравнение примет вид:

$$\frac{6^{x+1}}{37^{x+1}} = \frac{37^{x+1}}{37^{x+1}},$$

$$\left(\frac{6}{37}\right)^{x+1} = 1,$$

$$x+1 = 0,$$

$$x = -1.$$

Ответ: $x = -1$.

Решение показательных уравнений методом вынесения общего множителя за скобки

Пример № 8. Решить уравнение: $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$.

Решение:

$$5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0.$$

Заметим, что наименьший показатель $x-1$ и $5^{x+1} = 5^{x-1} \cdot 5^2$, $5^x = 5^{x-1} \cdot 5$.

Тогда исходное уравнение примет вид

$$5^{x-1} \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^{x-1} \cdot 5 + 10 = 0,$$

$$5^{x-1} \cdot (5^2 + 3 - 6 \cdot 5) + 10 = 0,$$

$$5^{x-1} \cdot (28 - 30) + 10 = 0,$$

$$5^{x-1} \cdot (-2) = -10,$$

$$5^{x-1} = 5,$$

$$x-1=1,$$

$$x=2.$$

Ответ: $x=2$.

Однородные показательные уравнения

Уравнение вида $A \cdot a^{nx} + B \cdot a^{mx} \cdot b^{(n-m)x} + C \cdot b^{nx} = 0$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ называется **однородным показательным уравнением**. В этом уравнении сумма показателей степеней чисел a и b в каждом слагаемом одинакова и равна nx .

Разделив почленно исходное уравнение на b^{nx} , получим уравнение:

$$A \cdot \frac{a^{nx}}{b^{nx}} + B \cdot \frac{a^{mx} \cdot b^{(n-m)x}}{b^{nx}} + C \cdot \frac{b^{nx}}{b^{nx}} = 0,$$

$$A \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{nx} + B \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{mx} + C = 0.$$

Обозначив $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t$, получим алгебраическое уравнение

$A \cdot t^n + B \cdot t^m + C = 0$. Решая это уравнение, находим его корни, а затем возвращаемся к переменной x .

Пример № 9. Решить уравнение: $64^x + 36^x - 10 \cdot 27^x = 0$.

Решение:

$$64^x + 36^x - 10 \cdot 27^x = 0.$$

1. Заметим, что $64 = 4^3$, $36 = 3^2 \cdot 4$, $27 = 3^3$.

Тогда исходное уравнение примет вид

$$4^{3x} + 3^{2x} 4^x - 10 \cdot 3^{3x} = 0.$$

Разделим исходное уравнение почленно на 3^{3x} :

$$\frac{4^{3x}}{3^{3x}} + \frac{3^{2x} 4^x}{3^{3x}} - 10 \cdot \frac{3^{3x}}{3^{3x}} = 0,$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{4}{3}\right)^x - 10 = 0.$$

Пусть $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, тогда $t^3 + t - 10 = 0$.

$$(t-2)(t^2 + 2t + 5) = 0,$$

$$t = 2 \text{ или } t^2 + 2t + 5 = 0,$$

$$D = 4 - 20 = -16.$$

Решений нет.

$$2. \quad t = 2, \text{ тогда } \left(\frac{4}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \log_{\frac{4}{3}} 2.$$

$$\text{Ответ: } x = \log_{\frac{4}{3}} 2.$$

Пример № 10

Решить уравнение: $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$.

Решение:

$$64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0.$$

Запишем уравнение в виде $64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x \cdot 4^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0$

и разделим его почленно на 4^{2x} :

$$64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x \cdot 4^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0,$$

разделим почленно обе части уравнения на 4^{2x} , получим:

$$64 \cdot \frac{3^{2x}}{4^{2x}} - 84 \cdot \frac{3^x \cdot 4^x}{4^{2x}} + 27 = 0,$$

$$64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 84 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 = 0.$$

Пусть $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, тогда получим квадратное уравнение

$$64t^2 - 84t + 27 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 42^2 - 64 \cdot 27 = 36,$$

$$t_1 = \frac{3}{4}, \quad t_2 = \frac{9}{16}.$$

$$1) \quad t_1 = \frac{3}{4}, \text{ тогда } \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4},$$

$$x = 1.$$

$$2) \quad t_2 = \frac{9}{16}, \text{ тогда } \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2, \\ x = 2.$$

Ответ: 1; 2.

2.1.6. Логарифмические уравнения

Логарифмическое уравнение — это такое уравнение, в котором неизвестная величина стоит под знаком логарифма.

При решении логарифмических уравнений часто приходится логарифмировать или потенцировать обе части уравнения, что не всегда может привести к равносильным уравнениям.

Логарифмировать алгебраическое выражение — значит выразить его логарифм через логарифмы отдельных чисел, входящих в это выражение.

Если по данному результату логарифмирования находят выражение, от которого получен этот результат, то такая операция называется **потенцированием**.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение $\log_a x = b$, причем основание логарифма $a > 0, a \neq 1$, а подлогарифмическое выражение $x > 0$.

Для любого действительного b это уравнение имеет единственное решение $x = a^b$.

Пример № 1. Решить уравнение: $\log_4 x = 3$.

Решение:

ОДЗ: $x > 0$.

Единственное решение уравнения $x = 4^3 = 64$.

Ответ: 64.

Логарифмическое уравнение вида $\log_a f(x) = b$

В уравнении $a > 0, a \neq 1$, $f(x)$ — элементарная алгебраическая функция, причем, чтобы уравнение имело решение, должно выполняться неравенство $f(x) > 0$.

Заменой $f(x) = t$ данное уравнение приводится к простейшему логарифмическому уравнению $\log_a t = b$.

Пример № 2. Решить уравнение: $\log_2(x^2 + 4) = 3$.

Решение:

ОДЗ: $x^2 + 4 > 0$, то есть x принадлежит множеству действительных чисел.

Заменой $x^2 + 4 = t$ данное уравнение приводится к простейшему логарифмическому уравнению $\log_2 t = 3$.

$$t = 2^3,$$

$$t = 8, \text{ тогда } x^2 + 4 = 8, x^2 = 4, x = \pm 2.$$

Ответ: $-2; 2$.

Логарифмическое уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

В уравнении $a > 0, a \neq 1$; $f(x)$ и $g(x)$ — элементарные алгебраические функции.

Решение логарифмических уравнений такого типа сводится к решению уравнения $f(x) = g(x)$. Поэтому для решения рассматриваемого типа уравнений $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ достаточно найти все решения уравнения $f(x) = g(x)$ и среди полученных выбрать те, которые относятся к ОДЗ уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Если уравнение $f(x) = g(x)$ решений не имеет, то их не имеет и исходное логарифмическое уравнение.

Пример № 3. Решить уравнение: $\ln(x + 1) = \ln(2x - 3)$.

Решение:

В область допустимых значений входят только те x , при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, больше нуля. Эти значения определяются следующей системой неравенств:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x + 1 > 0, \\ 2x - 3 > 0; \\ \begin{cases} x > -1, \\ x > \frac{3}{2}, \end{cases} \text{ тогда } x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right). \end{cases}$$

Решим уравнение $x + 1 = 2x - 3$,

$x = 4$, принадлежит области допустимых значений исходного уравнения.

Ответ: 4 .

В основе решения логарифмических уравнений лежит метод равносильных преобразований.

Рассмотрим следующее уравнение.

Пример № 4. Решить уравнение: $\log_2(x-3) = 2 - \log_2 x$.

Решение:

$$\log_2(x-3) = 2 - \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_2 x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x \cdot (x-3)) = 2, \\ x > 0, \\ x-3 > 0; \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x > 0, \\ x > 3; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = 4, \end{cases} \\ x > 3; \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

Можно решать логарифмические уравнения без использования метода равносильных преобразований, но тогда необходимо выполнять проверку найденных корней.

Покажем оформление этой задачи без использования метода равносильных преобразований.

$$\log_2(x-3) = 2 - \log_2 x,$$

$$\log_2(x-3) + \log_2 x = 2,$$

$$\log_2(x(x-3)) = 2,$$

$$\log_2(x(x-3)) = \log_2 4,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$x = -1; \quad x = 4.$$

Проверка:

Если $x = -1$, то выражение $\log_2 x$ не определено.

Если $x = 4$, то $\log_2(4-3) = 2 - \log_2 4$,

$$0 = 0.$$

Таким образом, корнем данного уравнения является только число 4.

Ответ: 4.

Решение уравнений, основанных на определении логарифма

Пример № 5. Решить уравнение: $\log_{\sqrt{x}-1}(2x-14) = 2$.

Решение:

Решение данного уравнения равносильно решению системы:

$$\begin{cases} 2x-14 = (\sqrt{x}-1)^2, \\ 2x-14 > 0, \\ \sqrt{x}-1 > 0, \\ \sqrt{x}-1 \neq 1. \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 7$.

Решим иррациональное уравнение, входящее в систему:

$$2x-14 = x-2\sqrt{x}+1,$$

$$2\sqrt{x} = 15-x.$$

Заметим, что $15-x \geq 0$, то есть $x \leq 15$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$4x = 225 - 30x + x^2,$$

$$x^2 - 34x + 225 = 0,$$

$$x = 25, \quad x = 9.$$

Хотя оба корня удовлетворяют области определения уравнения, но $x=25$ не удовлетворяет условию $x \leq 15$.

Тогда $x=9$ — единственный корень уравнения.

Ответ: 9.

Решение уравнений потенцированием

Пример № 6

Решить уравнение: $\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6 (x-11) = 1$.

Решение:

1. Область допустимых значений данного уравнения равносильна системе неравенств:

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-11 > 0. \end{cases}$$

Получим $x > 11$.

2. Решим исходное уравнение:

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \log_6 \sqrt{x-11} = 1,$$

$$\log_6 \sqrt{(x-2)(x-11)} = 1,$$

$$\sqrt{(x-2)(x-11)} = 6,$$

$$(x-2)(x-11) = 36,$$

$$x^2 - 13x - 14 = 0,$$

$$x = 14; \quad x = -1.$$

14 — единственный корень, так как -1 не принадлежит области допустимых значений данного уравнения.

Ответ: 14.

Применение основного логарифмического тождества

Пример № 7. Решить уравнение: $2^{1+\log_2(x^2-3x+5)} = 3x$.

Решение:

1. ОДЗ: $x^2 - 3x + 5 > 0$,

$D = 9 - 20 < 0$, тогда $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $2 \cdot 2^{\log_2(x^2-3x+5)} = 3x$.

Так как $2^{\log_2(x^2-3x+5)} > 0$, то левая часть уравнения положительна, а значит, и правая часть уравнения положительна, то есть $3x > 0$, значит, $x > 0$.

Применяя основное логарифмическое тождество, получим:

$$2(x^2 - 3x + 5) = 3x,$$

$$2x^2 - 6x + 10 = 3x,$$

$$2x^2 - 9x + 10 = 0,$$

$$x = 2,5; \quad x = 2.$$

Оба значения удовлетворяют условию $x > 0$, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: 2,5; 2.

Метод введения новой переменной

Пример № 8. Решить уравнение: $(\lg x)^2 - \lg x^3 + 2 = 0$.

Решение:

Область допустимых значений данного уравнения $x > 0$.

Запишем уравнение в виде $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$.

Пусть $\lg x = t$, тогда уравнение примет вид:

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

$$t = 1, \quad t = 2.$$

Сделаем обратную замену переменной:

$$\lg x = 1, \quad \lg x = 2,$$

$$x = 10, \quad x = 100.$$

Оба значения удовлетворяют условию $x > 0$, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: 10; 100.

Логарифмирование обеих частей уравнения

Пример № 9. Решить уравнение: $0,01x^{\lg x + 3} = 100$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

Умножим обе части уравнения на 100:

$$x^{\lg x + 3} = 10000.$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10:

$$\lg x^{\lg x + 3} = \lg 10000,$$

$$(\lg x + 3)\lg x = 4,$$

$$\lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0,$$

$$\lg x = -4, \quad \lg x = 1,$$

$$x = 0,0001; \quad x = 10.$$

Оба значения входят в ОДЗ.

Ответ: 10; 0,0001.

Переход к одному основанию логарифма

Пример № 10

Решить уравнение: $1 + \log_2(x - 1) = \log_{(x-1)} 4$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } x > 1, \quad x \neq 2.$$

Используя формулу перехода к новому основанию логарифма, перейдем в правой части уравнения к основанию 2:

$$1 + \log_2(x - 1) = \frac{\log_2 4}{\log_2(x - 1)},$$

$$1 + \log_2(x-1) = \frac{\log_2 4}{\log_2(x-1)},$$

$$\log_2(x-1) = y, \quad y \neq 0,$$

$$1 + y = \frac{2}{y}, \quad y^2 + y - 2 = 0,$$

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 1.$$

$$\text{Если } y_1 = -2, \text{ тогда } \log_2(x-1) = -2, \quad x_1 = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Если } y_2 = 1, \text{ тогда } \log_2(x-1) = 1, \quad x_1 = 3.$$

Оба значения удовлетворяют области допустимых значений исходного уравнения, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: 1,25; 3.

2.1.7. Равносильность уравнений, систем уравнений

Если из истинности высказывания А следует истинность высказывания В, то употребляют знак логического следования \Rightarrow , то есть $A \Rightarrow B$ (читается из А следует В).

Если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то такие высказывания называются равносильными, в этом случае употребляют знак равносильности \Leftrightarrow , то есть $A \Leftrightarrow B$ (читается А равносильно В).

Два математических выражения, соединенные знаком равенства (=), образуют **равенство**.

Если это числовое равенство, оно может быть **истинным** или **ложным**.

Например,

$$1,8 + 1 - 24 = -21,2 \text{ — истинное равенство,}$$

$$17 = 9 + 11 \text{ — ложное равенство.}$$

Если равенство содержит величины, обозначенные буквами, то оно может быть истинным при одних допустимых значениях входящих в него букв, и ложным — при других.

Если равенство является истинным при всех допустимых значениях входящих в него букв, оно называется тождеством.

Если равенство, содержащее переменную величину, которую обычно обозначают одной из букв латинского алфавита (например x), является истинным не при всех допустимых значениях этой переменной, оно называется **уравнением** с одним неизвестным.

Решением, или **корнем**, уравнения называется такое значение неизвестного x , при подстановке которого в обе части уравнения получается истинное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется множество всех значений переменной x , при которых алгебраические выражения, входящие в обе части уравнения, имеют смысл (т. е. все те значения x , при которых можно выполнить действия, указанные в этих алгебраических выражениях).

Решая уравнение, мы применяем к нему некоторые преобразования: упрощаем выражения, входящие в уравнение, переносим слагаемые из одной части равенства в другую, умножаем или делим обе части уравнения на выражение, содержащее x , возводим обе части уравнения в квадрат, логарифмируем и т. п., то есть заменяем исходное уравнение другим.

Два уравнения называются **равносильными** (эквивалентными), если множества их решений (корней) совпадают, то есть это такие уравнения, которые имеют одни и те же корни.

В частности, уравнения, которые не имеют корней, также считаются равносильными.

Например, уравнения $2x - 9 = 1$ и $3x = 15$ равносильны, так как каждое из них имеет единственный корень $x = 5$.

Равносильны и уравнения $2x^2 + 9 = 0$ и $x^4 = -20$ (на множестве действительных чисел), так как ни одно из данных уравнений не имеет корней.

Уравнения $x^2 = 16$ и $5x - 20 = 0$ не являются равносильными, так как первое уравнение имеет два корня $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, тогда как второе уравнение имеет единственный корень $x = 4$.

Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение:

1. Если в уравнении поменять местами левую и правую части, то получится уравнение, равносильное исходному.

$$\text{Например, } \frac{2x+5}{x^2-4} = x + \frac{7-x}{x+2} \Leftrightarrow x + \frac{7-x}{x+2} = \frac{2x+5}{x^2-4}.$$

2. Если в уравнении какое-либо слагаемое перенести из одной части равенства в другую, сменив его знак на про-

тивоположный, то получится уравнение, равносильное исходному.

Например, $\frac{2x+5}{x^2-4} = x + \frac{7-x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x^2-4} - \frac{7-x}{x+2} = x.$

3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число (или даже выражение, содержащее x , которое в ОДЗ не обращается в ноль), то новое уравнение будет равносильно исходному.

Например, $\frac{2x+5}{14} = x \Leftrightarrow 2x+5 = 14x.$

4. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть одно и то же число, то получится уравнение, равносильное исходному.

Например, $-4x+12 = 2x-3 \Leftrightarrow -4x+12+5 = 2x-3+5.$

5. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть любую функцию, то получится уравнение, равносильное исходному при условии, что области допустимых значений полученного и исходного уравнений совпадают.

Например,

$$-4x+12 = 2x-3 \Leftrightarrow -4x+12+x^2 = 2x-3+x^2.$$

Конечно, при решении уравнений лучше всего каждый раз переходить к равносильному. Однако это удастся далеко не всегда.

Если все корни первого уравнения являются корнями второго, то второе уравнение называется **следствием** первого.

Если в результате преобразований мы заменим исходное уравнение следствием, то при решении нового уравнения мы можем получить корни, не являющиеся корнями исходного уравнения, т.е. *посторонние* корни. В этом случае от посторонних корней, как правило, можно легко избавиться с помощью проверки.

Таким образом, при решении уравнений мы должны, в первую очередь, следить за тем, чтобы в результате преобразований исходного уравнения не происходила потеря корней, т.е. чтобы новое уравнение было следствием исходного или равносильно ему.

Две системы уравнений называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений (в том числе, если системы не имеют решений, то они равносильны).

2.1.8. Простейшие системы уравнений с двумя переменными

Несколько уравнений с двумя (или более) переменными образуют **систему уравнений**, если ставится задача найти множество решений этих уравнений.

Систему двух уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y). \end{cases}$$

Множество упорядоченных пар значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы, называется **решением системы уравнений**.

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

Система уравнений называется **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется **определенной**, если она имеет конечное число решений.

Система уравнений называется **неопределенной**, если она имеет бесконечное число решений.

Система уравнений называется **линейной**, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Решением системы линейных уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных (**пара чисел**), обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

Не решая систему линейных уравнений, можно определить число ее решений по коэффициентам при соответствующих переменных:

1. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение, геометрически это решение иллюстрируется как точка пересечения двух прямых, являющихся графиками уравнений системы.
2. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений, геометрически это означает, что прямые, являющиеся графиками уравнений системы, параллельны и не совпадают.
3. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечно много решений, геометрически это означает, что прямые, являющиеся графиками уравнений системы, совпадают.

2.1.9. Основные приемы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных

Основные методы решения систем уравнений:

- метод подстановки;
- метод алгебраического сложения;
- метод введения новых переменных.

Решение системы уравнений **методом подстановки** заключается в следующем:

1. Сначала из какого-нибудь уравнения системы выражают одну переменную через другую.
2. Полученное выражение нужно подставить в другое уравнение системы, благодаря чему получается уравнение с одной переменной.
3. Решив полученное уравнение, находят значение первой переменной.
4. Подставив найденное значение переменной в первое уравнение, получают соответствующее значение второй переменной.

Пример № 1

Решить систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ 3x + 8y = -1. \end{cases}$$

Решение:

1. Из первого уравнения выразим переменную y через x :

$$y = \frac{15 - 2x}{5}.$$

2. Подставим выражение для y во второе уравнение системы:

$$3x + \frac{8 \cdot (15 - 2x)}{5} = -1.$$

3. Решим полученное уравнение:

$$15x + 120 - 16x = -5,$$

$$-x = -125,$$

$$x = 125.$$

4. Подставляя $x = 125$ в выражение для y , получаем:

$$y = \frac{15 - 2 \cdot 125}{5} = -47.$$

Ответ: $x = 125$, $y = -47$.

При решении системы уравнений **методом алгебраического сложения** переходят от данной системы к равносильной ей системе, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную. При этом обычно умножают одно или два уравнения на числовой множитель таким образом, чтобы коэффициенты при соответствующих переменных были одинаковыми, но с противоположными знаками.

Алгоритм решения системы уравнений **методом алгебраического сложения** заключается в следующем:

1. Сначала нужно уравнять модули коэффициентов при каком-нибудь неизвестном.
2. Складывая или вычитая почленно полученные уравнения, прийти к уравнению с одной переменной.
3. Решив полученное уравнение, найти значение одной переменной.
4. Подставив найденное значение переменной в одно из уравнений системы, получить соответствующее значение второй переменной.

Пример № 2

Решить систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ 4x + 3y = -5. \end{cases}$$

Решение:

1. Умножим обе части первого уравнения на -2 , а второе уравнение оставим без изменений:

$$\begin{cases} -4x - 10y = -30, \\ 4x + 3y = -5. \end{cases}$$

2. Складывая первое и второе уравнение, получим:
 $-7y = -35$.

3. Решим полученное уравнение:
 $y = 5$.

4. Подставляя $y = 5$ в первое уравнение системы, получим:
 $2x + 5 \cdot 5 = 15$,
 $2x = -10$,
 $x = -5$.

Ответ: $(-5; 5)$.

Метод введения новых переменных

Метод введения новых переменных при решении систем двух уравнений с двумя переменными применяется в двух вариантах. Первый вариант: вводится одна новая переменная и используется только в одном уравнении системы (пример № 3). Второй вариант: вводятся две новые переменные и используются одновременно в обоих уравнениях системы (пример № 4).

Пример № 3

Решить систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,5, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение:

1. Введем новую переменную $t = \frac{x}{y}$, тогда первое уравнение системы примет вид: $t + \frac{1}{t} = 2,5$.

Решим это уравнение относительно переменной t :

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} = 0,$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

$$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Оба эти значения удовлетворяют условию $t \neq 0$, а потому являются корнями рационального уравнения с переменной t .

2. $t_1 = 2$, тогда $\frac{x}{y} = 2$, значит, $x = 2y$. Подставим выражение $x = 2y$ во второе уравнение системы:

$$(2y)^2 - y^2 = 3,$$

$$3y^2 = 3,$$

$$y = \pm 1.$$

Если $y = 1$, то $x = 2 \cdot 1 = 2$.

Если $y = -1$, то $x = 2 \cdot (-1) = -2$.

Таким образом, мы получили два решения заданной системы: $(2; 1)$ и $(-2; -1)$.

3. $t_2 = \frac{1}{2}$, тогда $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, значит $y = 2x$. Подставим выражение $y = 2x$ во второе уравнение системы:

$$x^2 - (2x)^2 = 3,$$

$$-3x^2 = 3,$$

$$x^2 = -1.$$

Это уравнение не имеет корней.

Ответ: $(2; 1); (-2; -1)$.

Пример № 4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{9}{2x+y} = 2, \\ \frac{4}{x+y} - \frac{12}{2x+y} = -1. \end{cases}$$

Решение:

Решим систему уравнений методом введения новых переменных.

1. Пусть $t = \frac{1}{x+y}$, $s = \frac{1}{2x+y}$, тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2t + 9s = 2, \\ 4t - 12s = -1. \end{cases}$$

Применим метод алгебраического сложения. Умножим обе части первого уравнения на (-2) и почленно сложим со вторым уравнением:

$$\begin{cases} -4t - 18s = -4, \\ 4t - 12s = -1; \end{cases}$$

$$-30s = -5,$$

$$s = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Тогда } 2t + \frac{9}{6} = 2, \text{ то есть } t = \frac{1}{4}.$$

2. Вернемся к исходным переменным:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2x+y} = \frac{1}{6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x + y = 6; \end{cases}$$

вычтем из первого уравнения второе:

$$-x = -2,$$

$$x = 2, \quad y = 4 - 2 = 2.$$

Ответ: $(2; 2)$.

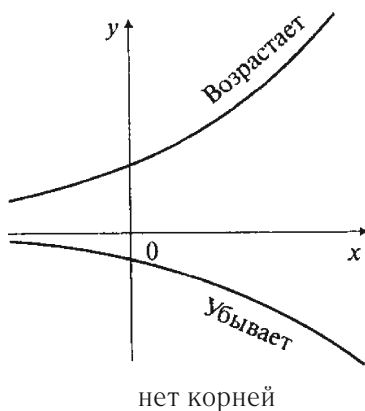
2.1.10. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений

Не каждое уравнение вида $f(x) = g(x)$ в результате преобразований или с помощью удачной замены переменной можно свести к уравнению того или иного стандартного вида, для которого существует определенный алгоритм решения.

В таких случаях часто оказывается полезным использовать некоторые свойства функций $y=f(x)$, $y=g(x)$: область определения, область значений, монотонность, ограниченность, четность и нечетность, периодичность.

Использование монотонности непрерывной функции

Если одна из функций убывает, а другая возрастает на промежутке X , то уравнение $f(x)=g(x)$ либо имеет один корень на промежутке X и тогда можно найти его подбором, либо не имеет корней.



Пример № 1. Решить уравнение $\sqrt{7-x} = x-1$.

Решение:

Для решения уравнения $\sqrt{7-x} = x-1$ нет необходимости возводить обе части уравнения в квадрат.

Заметим, что $x=3$ — корень уравнения и других корней нет, так как функция, стоящая в левой части уравнения $f(x) = \sqrt{7-x}$, убывающая на области определения функция, а в правой части уравнения функция $g(x) = x-1$ возрастает.

Ответ: 3.

Пример № 2. Решить уравнение $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$.

Решение:

1. Проверка показывает, что $x=1$ является корнем уравнения:

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = 2.$$

2. Функция $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}$, стоящая в левой части уравнения, убывает на множестве действительных чисел, а функция $g(x) = 2^x$, стоящая в правой части уравнения, возрастает на множестве действительных чисел, значит, других корней нет.

Ответ: $x = 1$.

Пример №3. Решить уравнение $6^x + 8^x = 10^x$.

Решение:

1. Функции, стоящие в левой и правой частях уравнения, возрастают на множестве действительных чисел, разделим обе части уравнения на 10^x , при этом мы получим уравнение, равносильное исходному:

$$\left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{8}{10}\right)^x = 1.$$

2. Проверка показывает, что $x=2$ является корнем уравнения: $\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2 = 0,36 + 0,64 = 1$.

3. Функция $f(x) = \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{8}{10}\right)^x$, стоящая в левой части уравнения, убывает на множестве действительных чисел, $g(x)=1$ — постоянная функция, следовательно, $x=2$ единственный корень уравнения.

Ответ: $x=2$.

Пример №4

Решить уравнение $\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}$.

Решение:

1. ОДЗ: $x \in [1; 3]$.

2. Подбором находим корень уравнения $x=2$:

$$\sqrt[4]{2-1} + 2\sqrt[3]{3 \cdot 2 + 2} = 4 + \sqrt{3-2},$$

$$5 = 5.$$

3. Так как на отрезке $[1; 3]$ функция $f(x) = \sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2}$, стоящая в левой части уравнения, возрастает, а функция $g(x) = 4 + \sqrt{3-x}$, стоящая в правой части, убывает, то других корней уравнение не имеет.

Ответ: $x=2$.

Пример № 5. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + \left(\sqrt{x-5\frac{2}{3}}\right)^2 + 13 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-3} + x.$$

Решение:

1. ОДЗ: $x \in [5\frac{2}{3}; +\infty)$.

2. Преобразовав исходное выражение, получим уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + \frac{22}{3} = \frac{(x-1)^2}{x-3}.$$

3. Функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + \frac{22}{3}$ убывает на области определения.

4. Проверка показывает, что $x=6$ является корнем уравнения:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-6} + \frac{22}{3} = \frac{(6-1)^2}{6-3},$$

$$\frac{25}{3} = \frac{25}{3}.$$

5. Если окажется, что функция, стоящая в правой части, непрерывна и возрастает на области допустимых значений, то можно будет сделать вывод, что уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + \frac{22}{3} = \frac{(x-1)^2}{x-3}$ имеет единственный корень.

6. Найдем производную функции $y = \frac{(x-1)^2}{x-3}$.

$$7. \quad y' = \frac{2(x-1)(x-3) - (x-1)^2}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2} > 0$$

при $x \in [5\frac{2}{3}; +\infty)$.

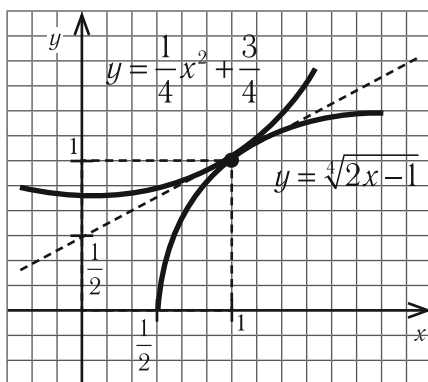
Тогда на области допустимых значений $x \in [5\frac{2}{3}; +\infty)$ функция $y = \frac{(x-1)^2}{x-3}$ непрерывна и возрастает, следовательно, $x=6$ является единственным корнем уравнения.

Ответ: 6.

Пример № 6. Решить уравнение $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} = \sqrt[4]{2x-1}$.

Решение:

1. Заметим, что $x=1$ является корнем уравнения.
2. Однако утверждать, что это единственный корень уравнения, мы пока не можем, так как функции $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ и $y = \sqrt[4]{2x-1}$ возрастают в области определения уравнения, то есть на луче $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.
3. Построим графики функций $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ и $y = \sqrt[4]{2x-1}$:



Графики имеют общую точку $(1; 1)$.

Найдем производные функций и вычислим их значения в точке $x=1$.

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4},$$

$$y' = \frac{x}{2},$$

$$y'(1) = \frac{1}{2}.$$

$$y = \sqrt[4]{2x-1}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-1)^3}}, \quad y'(1) = \frac{1}{2}.$$

Угловый коэффициент касательной и для одной, и для другой кривой в точке $(1; 1)$ один и тот же.

Значит, графики функций имеют общую касательную в точке $(1; 1)$. Других точек пересечения у графиков нет.

Ответ: $x=1$.

Использование ограниченности функции

Если функция $y=f(x)$ на промежутке X ограничена сверху, причем $f_{\text{наиб}}=A$, а функция $y=g(x)$ ограничена снизу, причем $f_{\text{наим}}=A$, то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$$

Пример № 7. Решить уравнение:

$$12+12x+4x^2=\left(\sin\frac{4\pi x}{3}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sin\frac{4\pi x}{3}\right).$$

Решение:

1. Выделяя полный квадрат в левой части уравнения и применяя формулы сокращенного умножения в правой части уравнения, преобразуем уравнение к виду:

$$(2x+3)^2+3=3-\sin^2\frac{4\pi x}{3}.$$

2. Функция $f(x)=(2x+3)^2+3$, стоящая в левой части уравнения, ограничена снизу и имеет наименьшее значение 3 при $x=-\frac{3}{2}$, а функция $g(x)=3-\sin^2\frac{4\pi x}{3}$, стоящая в правой части уравнения, ограничена сверху и имеет наибольшее значение 3 при $x=-\frac{3}{2}$.

Следовательно, $x=-\frac{3}{2}$ является единственным корнем уравнения.

Ответ: $x=-\frac{3}{2}$.

Пример № 8. Решить уравнение $2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}$.

Решение:

1. Заметим, что $2\cos^2\frac{x^2+x}{6}\leq 2$, тогда функция, стоящая в левой части уравнения, ограничена сверху и имеет наибольшее значение 2.

2. Пусть $t=2^x$, причем $t>0$, так как $2^x>0$, тогда правая часть уравнения примет вид $t+\frac{1}{t}$.
3. Применим неравенство $t+\frac{1}{t}\geq 2\cdot t\cdot\frac{1}{t}=2$ при $t>0$.
4. Таким образом, функция, стоящая в левой части уравнения, на множестве действительных чисел ограничена сверху и имеет наибольшее значение 2, а функция, стоящая в правой части уравнения, ограничена снизу, причем наименьшее значение тоже равно 2, тогда исходное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2, \\ 2^x+2^{-x}=2. \end{cases}$$

5. Из второго уравнения системы находим корень $x=0$.
Так как $x=0$ удовлетворяет и первому уравнению системы:

$$2\cos^2\frac{0}{6}=2,$$

$$2\cdot 1=2,$$

то $x=0$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 0.

Пример № 9. Решить уравнение

$$\sqrt{9+(5x-1)^2}=3-\cos^2\frac{15\pi x}{2}.$$

Решение:

Функция, стоящая в левой части уравнения, ограничена снизу и имеет наименьшее значение 3, которое достигается при $x=0,2$.

Функция, стоящая в правой части уравнения, ограничена сверху и имеет наибольшее значение 3 при $x=0,2$:

$$3-\cos^2\frac{15\pi\cdot 0,2}{2}=3-\cos^2\frac{3\pi}{2}=3-0=3.$$

Таким образом, $x=0,2$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 0,2.

Пример № 10

Решить уравнение $\sqrt{2 + \sin^2 4x} = \sin x - \cos x$.

Решение:

1. Пусть $f(x) = \sqrt{2 + \sin^2 4x}$, тогда $f(x) \geq \sqrt{2}$.

2. Пусть $g(x) = \sin x - \cos x$, тогда

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, $g(x) \leq \sqrt{2}$.

3. $f_{\text{наим}} = g_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$, значит, уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2}, \\ g(x) = \sqrt{2}, \\ \sqrt{2 + \sin^2 4x} = \sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + \sin^2 4x} &= \sqrt{2}, \\ \sin 4x &= 0, \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2},$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1,$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Серия решений второго уравнения $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ входит в серию решений первого уравнения $x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример № 11. Решить уравнение $2\cos x = 5x^2 + 2x + 3$.

Решение:

1. Заметим, что $2 \cdot \cos x \leq 2$, тогда функция, стоящая в левой части уравнения, ограничена сверху и имеет наибольшее значение 2.
2. Функция, стоящая в правой части уравнения, ограничена снизу и имеет наименьшее значение 2,8:
$$5x^2 + 2x + 3 \geq 5 \cdot (-0,2)^2 + 2 \cdot (-0,2) + 3 = 2,8.$$
3. Пересечение множества значений левой и правой частей уравнения — пустое множество, *поэтому уравнение корней не имеет.*

Ответ: корней нет.

Нахождение области определения функции

Пример № 12. Решить уравнение

$$\log_{0,2}(-x^2 + 4x + 5) = \log_{0,2}(-x - 31).$$

Решение:

Область допустимых значений уравнения определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 5 > 0, \\ -x - 31 > 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 < x < 5, \\ x < -31. \end{cases}$$

Эти два условия противоречат друг другу. То есть, нет ни одного такого значения x , при котором одновременно выполнялись бы оба неравенства.

Область допустимых значений уравнения является пустым множеством, а значит, решений у данного логарифмического уравнения нет.

Ответ: корней нет.

В этом задании нам вообще не пришлось искать корни уравнения. Оказалось достаточно определить, что его область допустимых значений не содержит ни одного действительного числа. Это одно из преимуществ такой последовательности решения уравнений (начинать с определения области допустимых значений уравнения, а затем решать его путем равносильных преобразований).

Пример № 13. Решить уравнение $\sqrt{x-3} + \sqrt{6-2x} = 0$.

Решение:

Область допустимых значений этого уравнения есть множество, состоящее из одного числа 3. Проверка показывает, что число 3 является корнем уравнения: $\sqrt{3-3} + \sqrt{6-2 \cdot 3} = 0$.

$0=0$.

Ответ: 3.

Пример № 14. Решить уравнение $\sqrt{x-5} + \sqrt{5-x} = \sqrt{x}$.

Решение:

Область допустимых значений этого уравнения есть множество, состоящее из одного числа -5 .

Число 5 не является корнем уравнения:

$$\sqrt{5-5} + \sqrt{5-5} = \sqrt{5},$$

$0 \neq \sqrt{5}$, поэтому уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

2.1.11. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем

Пусть задано уравнение с двумя переменными $F(x,y)=0$.

Пара значений переменных, обращающая уравнение с двумя переменными в верное равенство, называется **решением уравнения с двумя переменными**.

Множество решений таких уравнений можно представить и в виде графика.

Графиком уравнения $F(x,y)=0$ называют множество точек координатной плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют уравнению.

Для построения графика уравнения с двумя переменными сначала выражают в уравнении переменную y через переменную x .

Графики простейших уравнений с двумя переменными:

$ax + by = c$ — прямая;

$xy = k$ — гипербола;

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ — окружность, радиус которой равен r , а центр находится в точке с координатами $(x_0; y_0)$.

Пример № 1. Построить график уравнения $x^2 - 9y^2 = 0$.

Решение:

1. Разложим левую часть уравнения на множители:

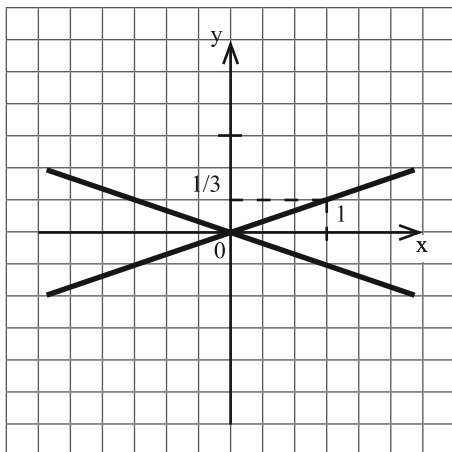
$$x^2 - 9y^2 = (x - 3y)(x + 3y), \text{ тогда } (x - 3y)(x + 3y) = 0,$$

то есть $x - 3y = 0$ или $x + 3y = 0$.

2. Графиком уравнения будут являться графики прямых

$$y = \frac{1}{3}x \text{ и } y = -\frac{1}{3}x,$$

построенные в одной координатной плоскости.



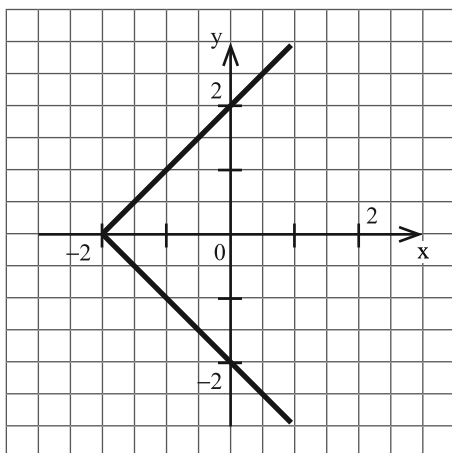
Пример № 2. Построить график уравнения $|y| = 2 + x$.

Решение:

Заданное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ y = 2 + x. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 < 0, \\ y = -x - 2. \end{cases}$$

Построим искомое множество точек.



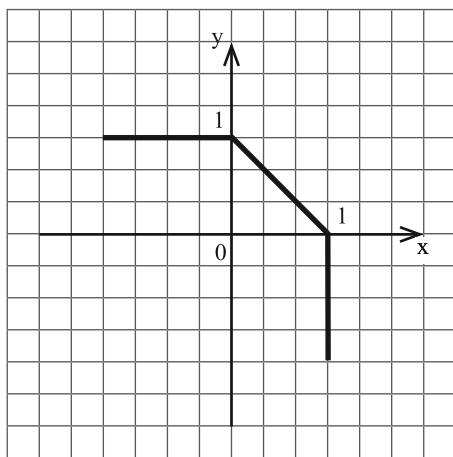
Пример № 3

Построить график уравнения $x + |x| + y + |y| = 2$.

Решение:

Знак каждого выражения, стоящего под модулем, зависит от координатной четверти.

1. В первой координатной четверти $x \geq 0$ и $y \geq 0$. После раскрытия модуля заданное уравнение будет иметь вид: $2x + 2y = 2$, то есть $x + y = 1$.
2. Во второй четверти, при $x < 0$, а $y \geq 0$, уравнение будет иметь вид: $x - x + y + y = 2$, то есть $y = 1$.
3. В третьей четверти, где $x < 0$, $y < 0$, раскрыв модуль, получим: $x - x + y - y = 2$, то есть $0 \cdot x + 0 \cdot y = 2$. Таких точек не существует.
4. В четвертой четверти, при $x \geq 0$, а $y < 0$, получим $x + x + y - y = 2$, то есть $x = 1$.
5. График данного уравнения:



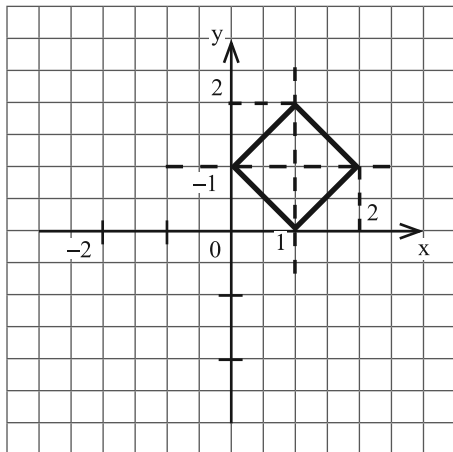
Пример № 4. Построить график уравнения $|x - 1| + |y - 1| = 1$.

Решение:

Нули подмодульных выражений $x = 1$ и $y = 1$ разбивают координатную плоскость на четыре области:

1. В первой области $x \geq 1$ и $y \geq 1$. После раскрытия модуля заданное уравнение будет иметь вид: $x - 1 + y - 1 = 1$, то есть $x + y = 3$.

2. Во второй области, при $x < 1$, а $y \geq 1$, уравнение будет иметь вид: $-x + 1 + y - 1 = 1$, то есть $-x + y = 1$.
3. В третьей области, где $x < 1$, $y < 1$, раскрыв модуль, получим: $-x + 1 - y + 1 = 1$, то есть $x + y = 1$.
4. В четвертой области, при $x \geq 1$, а $y < 1$, получим $x - 1 - y + 1 = 1$, то есть $x - y = 1$.
5. График данного уравнения:



Чтобы решить систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y , нужно рассмотреть каждое из уравнений системы как функциональную зависимость между переменными x и y и построить графики этих двух функций.

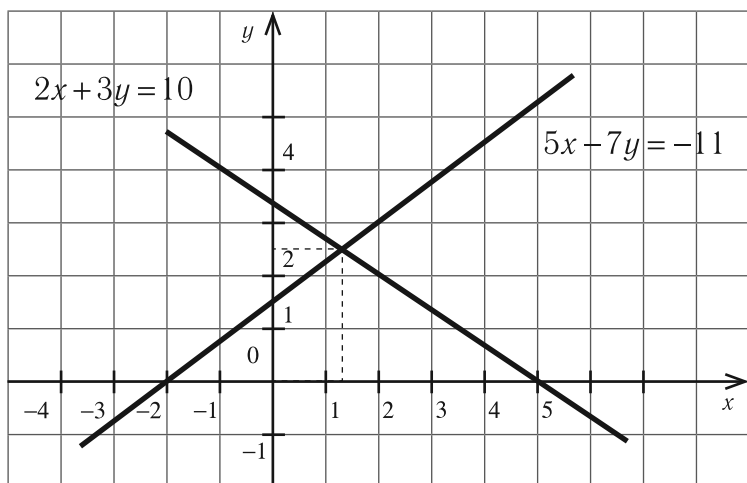
Координаты точек пересечения этих графиков дают искомые значения неизвестных x и y , то есть являются решениями этой системы уравнений.

Пример №5. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 5x - 7y = -11, \\ 2x + 3y = 10. \end{cases}$$

Решение:

Графики функций $y = \frac{5}{7}x + \frac{11}{7}$ и $y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$ — прямые линии:



Графики пересеклись в одной точке, следовательно, система имеет одно решение.

Ответ: одно решение.

2.1.12. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений

Понятия математики, представления и символы служат тем языком, на котором говорят, пишут и думают другие науки. При помощи математического аппарата возможно моделирование практической деятельности в реальной жизни, ее отдельных сторон, качеств и областей.

Примерами таких задач являются задачи на движение, на течение реки, на проценты, на среднюю скорость, на растворы и сплавы, на производительность труда и т.д.

Задачи на среднюю скорость

Чтобы найти среднее арифметическое нескольких чисел, нужно их сложить и разделить сумму на количество слагаемых.

Например, среднее арифметическое чисел 15, 10, 7, 48 равно $\frac{15+10+7+48}{4} = 20$.

Важно помнить, что *средняя величина и среднее арифметическое чисел*, характеризующих эту величину, *не одно и то же*. Так средняя скорость движения на участке пути длиной S , пройденном за время t , определяется по формуле $v = \frac{S}{t}$.

Пример № 1. Первые 190 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а затем 170 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

1. Всего автомобиль проделал путь длиной

$$190 + 180 + 170 = 540 \text{ км.}$$

2. Первый участок автомобиль проехал за $\frac{180}{50} = 3,8$ часа,
второй — за $\frac{180}{90} = 2$ часа,

$$\text{третий — за } \frac{170}{100} = 1,7 \text{ часа.}$$

3. Всего автомобиль был в пути $3,8 + 2 + 1,7 = 7,5$ часа.

4. Средняя скорость автомобиля $\frac{540}{7,5} = 72$ км/ч.

Ответ: 72 км/ч.

Задачи на проценты

Пример № 2. В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Решение:

1. При открытии торгов в понедельник акции стоили 100% или A рублей, до начала торгов во вторник на $x\%$ больше, т. е.

$$(100 + x)\% \text{ или } \frac{A \cdot (100 + x)}{100} \text{ рублей.}$$

2. При открытии торгов во вторник акции стоили 100% или $\frac{A \cdot (100 + x)}{100}$ рублей, по окончании торгов во вторник на $x\%$ меньше, то есть $(100 - x)\%$ или $\frac{A \cdot (100 + x)}{100} \cdot \frac{(100 - x)}{100}$ рублей.

3. С другой стороны, при открытии торгов в понедельник акции стоили 100% или A рублей, по окончании торгов во вторник — на 4% меньше, т. е. 96% или $A \cdot 0,96$ рублей.

4. Составляем уравнение для стоимости акций на конец дня вторника: $\frac{A \cdot (100 + x)}{100} \cdot \frac{(100 - x)}{100} = A \cdot 0,96$.

5. Обе части уравнения разделим на $A \neq 0$ и умножим на 100^2 , получим: $(100 + x) \cdot (100 - x) = 9600$.

Таким образом, в уравнении величина A сократилась, то есть она не была дана в условии потому, что не влияет на результат решения.

6. Решаем квадратное уравнение:

$$100^2 - x^2 = 9600,$$

$$x^2 = 10000 - 9600 = 400,$$

$$x = 20 \text{ или } x = -20.$$

$x = -20$ не удовлетворяет условию задачи, так как $-20 < 0$.

Ответ: 20%.

Задачи на движение

Решение задач на движение очень часто сводятся к решению квадратного уравнения. Для решения задач с помощью квадратных уравнений необходимо вспомнить закон свободного падения, формулы корней квадратного уравнения, формулу пути.

Пример № 3. Скорость велосипедиста на первой половине пути была на 3 км/ч больше, чем его скорость на второй половине пути. С какой скоростью велосипедист проехал вторую половину пути, если весь путь в 90 км он преодолел за 5,5 часа?

Решение:

Пусть x км/ч скорость велосипедиста на второй половине пути, тогда первую половину пути велосипедист проехал со скоростью $(x + 3)$ км/ч.

Так как весь путь равен 90 км, то его половина равна 45 км, поэтому время, затраченное велосипедистом на второй половине пути, равно $\frac{45}{x}$ ч, а время, затраченное велосипедистом на первой половине пути, равно $\frac{45}{x+3}$ ч.

По условию задачи известно, что весь путь велосипедист преодолел за 5,5 часа, составим и решим уравнение:

$$\frac{45}{x} + \frac{45}{x+3} = \frac{11}{2},$$

$$11x^2 - 147x - 270 = 0,$$

$$D = (-147)^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-270) = 33489,$$

$$x_1 = \frac{147+183}{22} = 15, \quad x_2 = \frac{147-183}{22} = -\frac{18}{11}.$$

$x_2 = -\frac{18}{11}$ условию задачи не удовлетворяет, так как скорость отрицательной быть не может.

Ответ: 15 км/ч.

Задачи на производительность

Производительность труда — эффективность труда в процессе производства. Производительность труда измеряется количеством продукции, произведенной в единицу времени, или количеством времени, затраченного на производство единицы продукции.

Производительность оборудования — объем продукции (работы), производимой в единицу времени данным оборудованием. Измеряется в тоннах, штуках, метрах и т. п. на единицу времени.

Производительность — это скорость производства:

- скорость движения = расстояние/время;
- производительность труда = объем продукции/время;
- производительность трубы = объем воды/время.

Пример № 4. Первая труба наполняет резервуар за 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за

4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Решение:

Пусть вторая труба наполняет резервуар за t минут, тогда за одну минуту она наполняет $\frac{1}{t}$ часть резервуара.

Первая труба наполняет резервуар дольше, за $t + 6$ минут, а за минуту она наполняет $\frac{1}{t + 6}$ часть резервуара.

Обе трубы вместе за минуту наполняют $\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 6}$ часть резервуара.

С другой стороны, они вместе наполняют резервуар за 4 минуты, значит, за минуту — $\frac{1}{4}$ часть.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 6} = \frac{1}{4},$$

$$t^2 - 2t - 24 = 0.$$

Корни уравнения $t_1 = 6$, $t_2 = -4$. Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, следовательно, $t = 6$.

Ответ: 6 минут.

Интерпретация результата, учет реальных ограничений

Пример № 5. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} \text{ Гц, где } c \text{ — скорость звука (в м/с).}$$

Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Решение:

Задача сводится к решению неравенства $f(v) - f_0 \geq 10$ при известном значении постоянной $f_0 = 440$ Гц:

$$f(v) - f_0 \geq 10,$$

$$\frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geq 10,$$

$$\frac{440}{1 - \frac{v}{315}} - 440 \geq 10,$$

$$1 - \frac{v}{315} \leq \frac{44}{45},$$

$$v \geq \frac{315}{45},$$

$$v \geq 7 \text{ м/с}.$$

Ответ: 7 м/с.

Пример № 6. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в вольтах, R — сопротивление электроприбора в Омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 ампера. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в Омах.

Решение:

Задача сводится к решению неравенства $I \leq 4$ А при известном значении напряжения $U = 220$ В:

$$I \leq 4, \text{ тогда } \frac{220}{R} \leq 4, \text{ значит, } R \geq 55 \text{ Ом}.$$

Ответ: 55 Ом.

2.2. Неравенства

Неравенство, содержащее одну переменную, называется неравенством с одной переменной (неизвестной).

Решением неравенства называется такое значение переменной, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

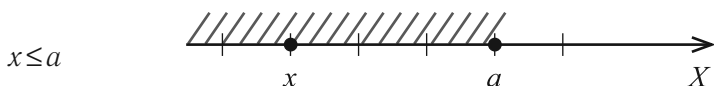
Решить неравенство — это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства называются **равносильными**, если они имеют одни и те же решения, или они оба не имеют решений.

При решении неравенств используют основные свойства неравенств.

Решение неравенств обозначают на координатной прямой.

Пусть a — некоторое число. Часть координатной прямой левее точки a вместе с точкой a :



Часть координатной прямой левее точки a , но не включая точку a :

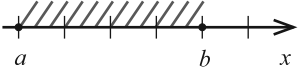
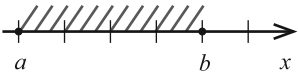
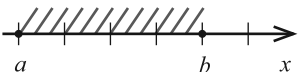
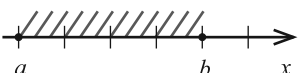
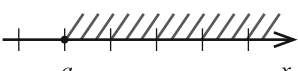
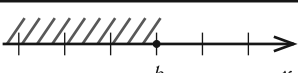
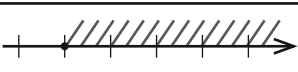
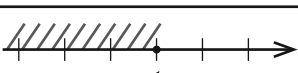


Аналогично, если x находится правее точки a :



Обозначения числовых множеств на координатной прямой носят название **числовые промежутки**.

Таблица числовых промежутков

| Обозначение | Название числового промежутка | Аналитическая модель | Геометрическая модель |
|----------------|-------------------------------|----------------------|--|
| $[a;b]$ | отрезок | $a \leq x \leq b$ |  |
| $(a;b)$ | интервал | $a < x < b$ |  |
| $(a;b]$ | полуинтервал | $a < x \leq b$ |  |
| $[a;b)$ | полуинтервал | $a \leq x < b$ |  |
| $[a; +\infty)$ | луч | $x \geq a$ |  |
| $(-\infty; b]$ | луч | $x \leq b$ |  |
| $(a; +\infty)$ | открытый луч | $x > a$ |  |
| $(-\infty; b)$ | открытый луч | $x < b$ |  |

Основные свойства неравенств

1. Если $a > b$, то $b < a$.
2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (*свойство транзитивности*).
3. Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство, то есть если $a > b$, то $a + c > b + c$.
4. Если из одной части верного неравенства перенести в другую какое-либо слагаемое, изменив его знак на противоположный, то получится верное неравенство. Например, если $a + b > c$, то $a > c - b$ или $a - c > -b$.

5. Если обе части верного неравенства умножить (или разделить) на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство.
Например, если $a > b$, то $117a > 117b$.
6. Если обе части верного неравенства умножить (или разделить) на одно и то же отрицательное число и *изменить знак неравенства на противоположный*, то получится верное неравенство.
Например, если $a > b$, то $-117a < -117b$.

Действия с неравенствами

1. Неравенства одинакового знака можно почленно складывать:

$$\begin{array}{ccc} a > b, & & \text{или } a < b, \\ c > d, & & c < d, \\ a + c > b + d. & & a + c < b + d. \end{array}$$

2. Неравенства одинаковых знаков с положительными членами можно почленно умножать.

Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$.

3. Обе части неравенства с положительными членами можно возводить в одну и ту же натуральную степень.

Если $a > b$, $a > 0$ и $b > 0$, то $a^n > b^n$, где $n \in \mathbb{N}$.

4. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

2.2.1. Квадратные неравенства

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$), где a , b и c — числа, $a \neq 0$, x — переменная, называется **квадратным**.

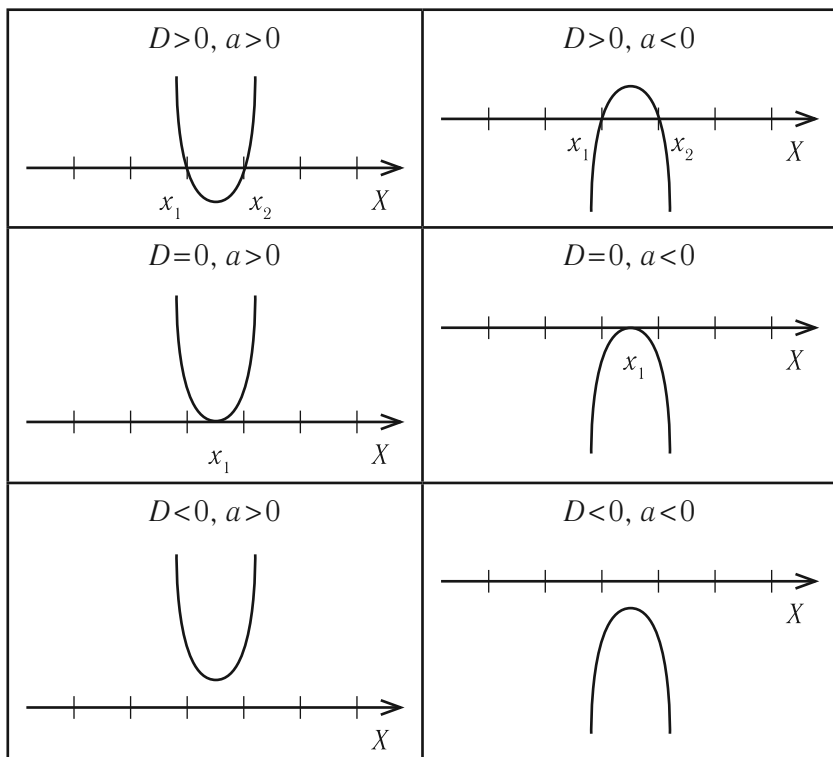
При решении квадратного неравенства необходимо найти корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Для этого необходимо найти дискриминант данного квадратного уравнения. Можно получить три случая:

- 1) $D = 0$, квадратное уравнение имеет один корень;
- 2) $D > 0$, квадратное уравнение имеет два корня;
- 3) $D < 0$, квадратное уравнение не имеет корней.

Рассмотрим графический метод решения квадратных неравенств.

В зависимости от полученных корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ и знака коэффициента a возможно одно из шести расположений графика функции $y=ax^2+bx+c$:



Если требуется найти числовой промежуток, на котором квадратный трехчлен ax^2+bx+c больше нуля, то это числовой промежуток находится там, где парабола лежит выше оси Ox .

Если требуется найти числовой промежуток, на котором квадратный трехчлен ax^2+bx+c меньше нуля, то это числовой промежуток, где парабола лежит ниже оси Ox .

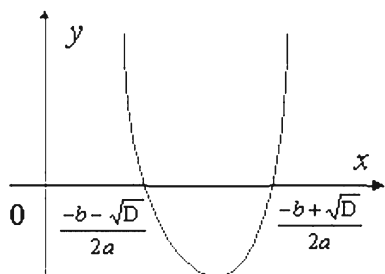
Если квадратное неравенство нестрогое, то корни входят в числовой промежуток, если строгое — не входят.

Например, квадратное неравенство $ax^2+bx+c>0$ при $a>0$ и $D>0$ имеет решения:

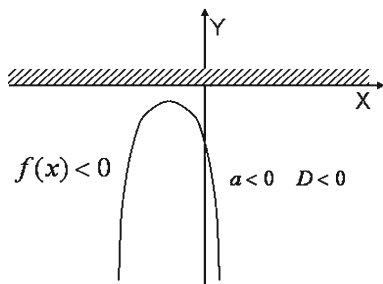
$$x \in \left(-\infty; \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; +\infty\right).$$

Квадратное неравенство
 $ax^2+bx+c \geq 0$ при $a>0$ и $D>0$
 имеет решения:

$$x \in \left(-\infty; \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right] \cup \left[\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; +\infty\right).$$



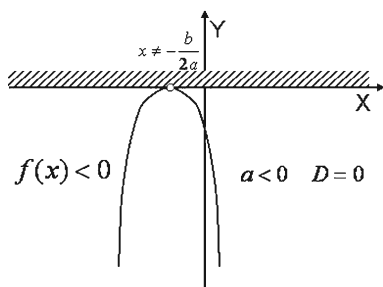
Квадратное неравенство
 $ax^2+bx+c < 0$ при $a<0$ и $D<0$
 имеет решения: $x \in (-\infty; +\infty)$.



Квадратное неравенство
 $ax^2+bx+c \geq 0$ при $a<0$ и $D<0$
 не имеет решений.

Квадратное неравенство
 $ax^2+bx+c < 0$ при $a<0$ и $D=0$
 имеет решения:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right).$$



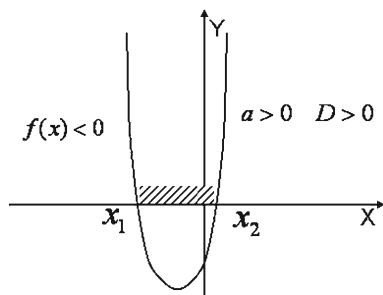
Квадратное неравенство
 $ax^2+bx+c \leq 0$ при $a<0$ и $D=0$
 имеет решения: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Квадратное неравенство
 $ax^2+bx+c \leq 0$ при $a>0$ и $D>0$
 имеет решения:

$$x \in \left[\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right].$$

Квадратное неравенство
 $ax^2+bx+c < 0$ при $a>0$ и $D>0$
 имеет решения:

$$x \in \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right).$$



Пример № 1. Найти целочисленные решения неравенства $2x^2 - 9x + 4 \leq 0$.

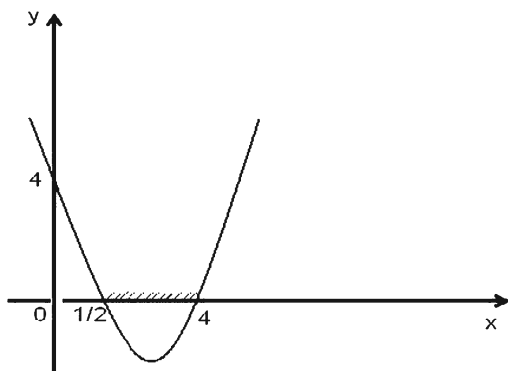
Решение:

Рассмотрим функцию $y = 2x^2 - 9x + 4$, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем корни квадратного трехчлена, для этого решим уравнение $2x^2 - 9x + 4 = 0$.

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 49;$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{4}; x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 4.$$



Заштрихуем числовой промежуток, где парабола лежит ниже оси Ox , тогда решением неравенства $2x^2 - 9x + 4 \leq 0$ будет отрезок $x \in \left[\frac{1}{2}; 4 \right]$.

Отрезку $\left[\frac{1}{2}; 4 \right]$ принадлежат целые числа: 1, 2, 3, 4.

Ответ: 1, 2, 3, 4.

Пример № 2. Решить неравенство $2x^2 + 4x + 5 \leq 0$.

Решение:

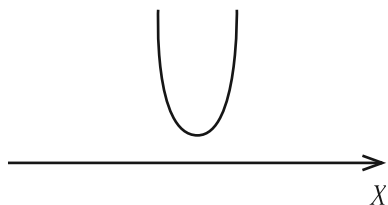
Рассмотрим функцию $y = 2x^2 + 4x + 5$, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем корни квадратного трехчлена $2x^2 + 4x + 5$, для этого решим уравнение $2x^2 + 4x + 5 = 0$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 16 - 40 = -24$, дискриминант отрицателен, тогда трехчлен $2x^2 + 4x + 5$ не имеет действительных корней, следовательно, парабола, являющаяся графиком этого трехчлена, не пересекает ось Ox :

Нет числового промежутка, где парабола лежит ниже оси Ox , следовательно, исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: решений нет.



Пример № 3. Решите неравенство $25x^2 - 30x + 9 > 0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $y = 25x^2 - 30x + 9$, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

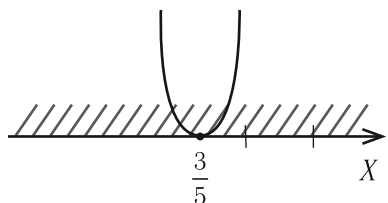
Найдем корни квадратного трехчлена $25x^2 - 30x + 9$, для этого решим уравнение $25x^2 - 30x + 9 = 0$.

$$D = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 900 - 900 = 0.$$

Квадратный трехчлен имеет единственный корень:

$$x = -\frac{-30}{50} = \frac{3}{5}.$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right).$$



2.2.2. Рациональные неравенства

Рациональным неравенством называется неравенство, которое содержит только рациональные функции.

Рациональные неравенства имеют вид

$$\frac{A}{B} > 0 \left(\frac{A}{B} \geq 0, \frac{A}{B} < 0, \frac{A}{B} \leq 0 \right), \text{ где } A \text{ и } B \text{ — многочлены.}$$

Например,

$$\frac{9x^5 - 12x^4 + 24x - 29}{7x^2 - 19x + 3} \geq 0, \frac{(9-2x)(x-4)}{x^2 - 16x + 64} < 0, \frac{25-18x}{2x-7} > 0 —$$

рациональные неравенства. Линейные и квадратные неравенства также являются рациональными.

Рациональные неравенства бывают **целыми** (в них нет операции деления на выражение, содержащее переменную), например $2x^7 - 6x^5 - 11x^4 + 5x \leq 0$, и **дробно-рациональными** (в них есть операция деления на выражение, содержащее переменную), например $\frac{5x^3 + 18x^2}{x - 3} \geq 0$.

Рациональное или преобразованное неравенство удобно решать, используя **метод интервалов по следующему алгоритму**:

1. Найти область определения и нули функции левой части неравенства.
2. Отметить нули функции на координатной прямой. (Если неравенство строгое, то кружки, обозначающие корни на числовой оси, оставляем «пустыми», если неравенство нестрогое, то кружки закрашиваем.)
3. Определить знаки значений функции на каждом полученном интервале. (Если $f(x) > 0$, то ставим знак «+», если $f(x) < 0$, то ставим знак «-».)
4. Выбрать интервалы, на которых значения функции имеют знак, соответствующий знаку неравенства.
5. Записать ответ.

Чтобы найти нули функции, мы должны решить уравнение $f(x) = 0$. Если **некоторые корни этого уравнения имеют четную кратность, то функция в этих точках знак не меняет**.

При решении рациональных неравенств методом интервалов полезно разложить левую часть неравенства на множители, одинаковые множители записать в виде степени. Это действие позволит не ошибиться с кратностью корней — если в результате получится множитель в четной степени, значит, соответствующий корень имеет четную кратность.

Пример № 1. Решить неравенство $-3x + 17 < 5x + 9$.

Решение:

$$-3x + 17 < 5x + 9,$$

$$-3x - 5x < 9 - 17,$$

$$-8x < -8,$$

$$x > 1.$$

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

Пример № 2

Решить неравенство $(x - 5)(x + 3)^2(x - 7)^3 x \leq 0$.

Решение:

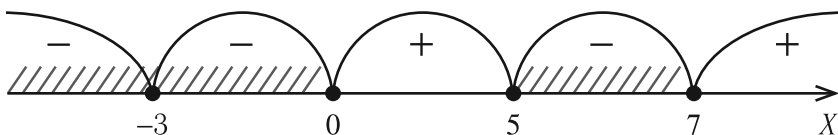
Рассмотрим функцию $f(x) = (x - 5)(x + 3)^2(x - 7)^3 x$.

Область определения функции $x \in (-\infty; +\infty)$.

Найдем нули функции: $(x - 5)(x + 3)^2(x - 7)^3 x = 0$,

$$x = 5, x = -3, x = 7, x = 0.$$

Отметим найденные точки на числовой прямой, она разбивается на 5 интервалов, на каждом из которых рациональная функция непрерывна и сохраняет знак:



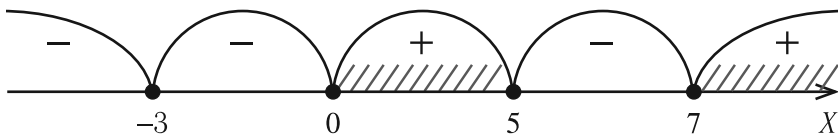
Функция принимает значения меньше или равные нулю на следующих промежутках $(-\infty; 0] \cup [5; 7]$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [5; 7]$.

Пример № 3

Решить неравенство $(x - 5)(x + 3)^2(x - 7)^3 x \geq 0$.

Решение:



Функция принимает значения больше или равные нулю на промежутках $[0; 5]$, $[7; +\infty)$ и в точке $x = -3$.

Ответ: $x \in [0; 5] \cup [7; +\infty) \cup \{-3\}$.

Пример № 4

Решить неравенство $\frac{(x+11)^3(x-3)^2(x-9)}{(x-2)(x-12)^2} \geq 0$.

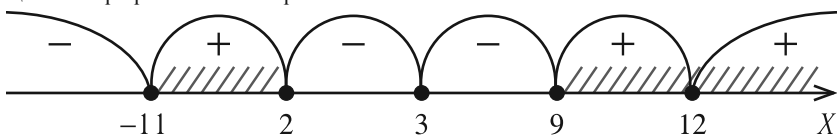
Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x+11)^3(x-3)^2(x-9)}{(x-2)(x-12)^2}$.

Область определения функции $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 12) \cup (12; +\infty)$.

Найдем нули функции: $(x+11)^3(x-3)^2(x-9) = 0$,
 $x = -11, x = 3, x = 9$.

Отметим найденные точки на числовой прямой, она разбивается на 6 интервалов, на каждом из которых рациональная функция непрерывна и сохраняет знак:



Ответ: $x \in [-11; 2) \cup [9; 12) \cup (12; +\infty) \cup \{3\}$.

2.2.3. Показательные неравенства

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются **показательными**.

Простейшие показательные неравенства имеют вид:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a^{f(x)} \geq a^{g(x)}, a^{f(x)} < a^{g(x)}, a^{f(x)} \leq a^{g(x)}.$$

Чтобы решить показательное неравенство, нам нужно от сравнения степеней перейти к сравнению показателей.

Показательная функция $y = a^x$ возрастает при всех действительных значениях x , если $a > 1$. Это значит, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. То есть из неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ следует неравенство $f(x) > g(x)$, из неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ следует неравенство $f(x) < g(x)$.

Аналогично, так как показательная функция $y = a^x$ убывает, если $0 < a < 1$, и большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, из неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ следует неравенство $f(x) < g(x)$, а из неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ следует неравенство $f(x) > g(x)$.

То есть при решении простейших показательных неравенств прежде чем сравнивать выражения, стоящие в показателе степени, нужно сравнить с единицей основание степеней:

- если *основание степени больше единицы*, то при переходе к выражениям, стоящим в показателе, *знак неравенства сохраняется*;
- если основание *степени больше нуля, но меньше единицы*, то при переходе к выражениям, стоящим в показателе, *знак неравенства меняется на противоположный*.

Все показательные неравенства любого уровня сложности, в конечном итоге, сводятся к решению простейших показательных неравенств.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример № 1. Решить неравенство $16^{2x-1} < 0,125$.

Решение:

$$16^{2x-1} < 0,125,$$

$$(2^4)^{2x-1} < \frac{1}{8}, \text{ приведем к одинаковому основанию:}$$

$$2^{8x-4} < 2^{-3}.$$

Основание степени больше 1, следовательно, знак неравенства не меняется:

$$8x - 4 < -3,$$

$$8x < 1,$$

$$x < \frac{1}{8}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; \frac{1}{8}\right).$$

Пример № 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x} \geq 3$.

Решение:

Представим число 3 в виде $3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}.$$

Заметим, что $0 < \frac{1}{2} < 1$, основание степени больше нуля, но меньше единицы, значит, при переходе к выражениям, стоящим в показателе, знак неравенства меняется на противоположный:

$$5x \leq \log_{\frac{1}{2}} 3,$$

$$x \leq \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} 3.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} 3 \right].$$

Для неравенств, содержащих одинаковые степени, метод решения заключается в вынесении общего множителя за скобки и применении свойств показательной функции.

Пример № 3. Решить неравенство $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$.

Решение:

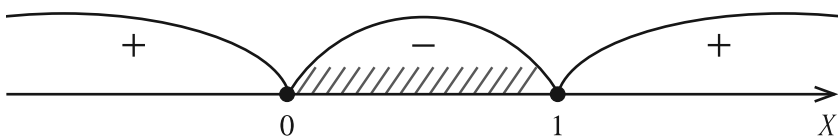
$3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} \cdot 3^3 > 84$, вынесем общий множитель $3^{\frac{1}{x}}$ за скобки:

$$3^{\frac{1}{x}} (1 + 27) > 84,$$

$$3^{\frac{1}{x}} > 3.$$

Показательная функция с основанием 3 является возрастающей, значит, $\frac{1}{x} > 1$, перенесем единицу в левую часть неравенства и приведем полученное выражение к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x} - 1 > 0, \quad \frac{1-x}{x} > 0, \quad \frac{x-1}{x} < 0.$$



Ответ: $x \in (0; 1)$.

Пример № 4. Решить неравенство $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \leq 315$.

Решение:

$3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \leq 315$, вынесем общий множитель 3^{2x} за скобки:

$$3^{2x} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{81} \right) \leq 315,$$

$$3^{2x} \cdot \frac{35}{81} \leq 315,$$

$$3^{2x} \leq 3^6,$$

показательная функция с основанием 3 является возрастающей, поэтому знак неравенства не меняется:

$$2x \leq 6, \quad x \leq 3, \quad x \in (-\infty; 3].$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; 3].$$

Вообще, показательные неравенства делятся на те же типы, что и показательные уравнения, и решаются теми же способами (см. п. 2.1.5.). Если мы решаем неравенство *с помощью замены переменных (метода введения новой переменной)*, то **нужно решать относительно замены до получения простейшего неравенства.**

Пример № 5. Решить неравенство $9^x < 12 \cdot 3^x - 27$.

Решение:

$$9^x < 12 \cdot 3^x - 27,$$

$$9^x - 12 \cdot 3^x + 27 < 0.$$

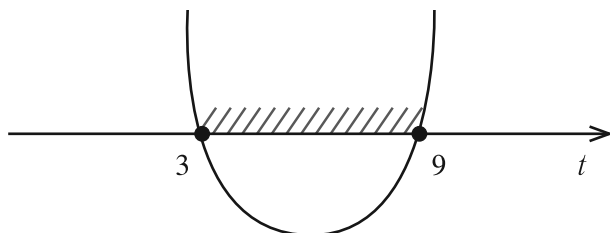
Пусть $t = 3^x$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству: $t^2 - 12t + 27 < 0$.

Найдем корни квадратного трехчлена $t^2 - 12t + 27$, для этого решим уравнение $t^2 - 12t + 27 = 0$.

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27 = 144 - 108 = 36;$$

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm 6}{2}; \quad t_1 = 3; \quad t_2 = 9.$$

Графиком функции $y = t^2 - 12t + 27$ является парабола, ветви которой направлены вверх:



Тогда $3 < t < 9$.

Сделаем обратную замену переменной:

$$3 < 3^x < 9,$$

$3 < 3^x < 3^2$, основание степени больше 1, следовательно, знак неравенства не меняется:

$$1 < x < 2.$$

Ответ: $x \in (1; 2)$.

2.2.4. Логарифмические неравенства

Логарифмическими называют **неравенства**, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании.

В процессе решения логарифмических неравенств часто используются следующие утверждения относительно равносильности неравенств и учитываются свойства монотонности логарифмической функции.

Утверждение 1. Если $a > 1$, то неравенство

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 2. Если $0 < a < 1$, то неравенство

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ h(x) > 1. \end{cases} \right. \left. \begin{cases} 0 < f(x) < g(x), \\ 0 < h(x) < 1. \end{cases} \right]$$

Отметим, что в неравенстве $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ вместо знака $>$ может фигурировать любой из знаков $\geq, <, \leq$. В этом случае утверждения 1–3 преобразуются соответственно.

Пример № 1. Решить неравенство

$$\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x + 8).$$

Решение:

$$\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x + 8), \text{ основание } 3 > 1,$$

$$\text{то неравенство } \log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x + 8)$$

равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x \geq x + 8, \\ x + 8 > 0. \end{cases}$$

$$1. \quad x^2 - x \geq x + 8, \quad x^2 - 2x - 8 \geq 0, \quad x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty).$$

$$2. \quad x + 8 > 0, \quad x \in (-8; +\infty).$$

$$3. \quad \begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty), \\ x \in (-8; +\infty). \end{cases}$$

$$\text{Тогда } x \in (-8; -2] \cup [4; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } x \in (-8; -2] \cup [4; +\infty).$$

Пример № 2. Решить неравенство $\log_{0,2} x^2 > \log_{0,2}(3x)$.

Решение:

$$\log_{0,2} x^2 > \log_{0,2}(3x), \text{ основание } 0 < 0,2 < 1, \text{ то неравенство}$$

$$\log_{0,2} x^2 > \log_{0,2}(3x) \text{ равносильно системе неравенств:}$$

$$\begin{cases} x^2 < 3x, \\ x^2 > 0, \\ 3x > 0. \end{cases}$$

$$1. \quad x^2 < 3x, \quad x^2 - 3x < 0, \quad x \in (0; 3).$$

$$2. \quad x^2 > 0, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

$$3. \quad 3x > 0, \quad x > 0, \quad x \in (0; +\infty).$$

$$4. \quad \begin{cases} x \in (0; 3), \\ x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \\ x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

$$\text{Тогда } x \in (0; 3).$$

$$\text{Ответ: } x \in (0; 3).$$

В случае логарифмических неравенств, которые не имеют вид неравенств, входящих в утверждения 1–3, определяется область допустимых значений (ОДЗ), и с помощью равносильных преобразований исходные неравенства сводятся к неравенствам, которые решаются с помощью утверждений 1–3.

Пример № 3

Решить неравенство $\lg(x-2) + \lg(x-5) < \lg 4$.

Решение:

1. ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-5>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>2, \\ x>5; \end{cases}$$

тогда решением системы является неравенство $x>5$, то есть $x \in (5; +\infty)$.

2. Используя свойства логарифмов, получим неравенство: $\lg(x-2)(x-5) < \lg 4$, основание десятичного логарифма $10 > 1$, тогда неравенство $\lg(x-2)(x-5) < \lg 4$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} (x-2)(x-5) < 4, \\ (x-2)(x-5) > 0. \end{cases}$$

Решим систему неравенств:

1. $x^2 - 7x + 10 < 4$, $x^2 - 7x + 6 < 0$, $x \in (1; 6)$.

2. $(x-2)(x-5) > 0$, $x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

3. $\begin{cases} x \in (1; 6), \\ x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty), \end{cases}$ тогда $x \in (1; 2) \cup (5; 6)$.

4. Решение системы неравенств $x \in (1; 2) \cup (5; 6)$,

ОДЗ: $x \in (5; +\infty)$, тогда решением исходного неравенства будет интервал $x \in (5; 6)$.

Ответ: $x \in (5; 6)$.

Логарифмические неравенства, решаемые с использованием метода введения новой переменной

Пример № 4

Решить неравенство $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \leq 0$.

Решение:

$$\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \leq 0.$$

Область допустимых значений исходного неравенства: $x > 0$.

Пусть $t = \log_3 x$, тогда $t^2 - 2t - 3 \leq 0$. Решением полученного неравенства является отрезок $t \in [-1; 3]$. Сделаем обратную замену переменной:

$$-1 \leq \log_3 x \leq 3,$$

$\log_3 3^{-1} \leq \log_3 x \leq \log_3 3^3$, учитывая, что логарифмическая функция $y = \log_3 x$ является возрастающей на области определения, знак неравенства изменяться не будет:

$$3^{-1} \leq x \leq 3^3, \text{ то есть } \frac{1}{3} \leq x \leq 27,$$

учитывая область допустимых значений $x > 0$, получим $\frac{1}{3} \leq x \leq 27$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{3}; 27 \right]$.

2.2.5. Системы линейных неравенств

Линейным неравенством с одной переменной называется неравенство вида $ax > b$ ($ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$), где a и b — числа, x — переменная.

Решение неравенств первой степени представлено в следующей таблице:

| | $ax > b$ | $ax \geq b$ | $ax < b$ | $ax \leq b$ |
|---|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $a > 0$, знак неравенства не меняется | $x > \frac{b}{a}$ | $x \geq \frac{b}{a}$ | $x < \frac{b}{a}$ | $x \leq \frac{b}{a}$ |
| $a < 0$, знак неравенства меняется на противоположный | $x < \frac{b}{a}$ | $x \leq \frac{b}{a}$ | $x > \frac{b}{a}$ | $x \geq \frac{b}{a}$ |
| $a = 0, b = 0$ | Решений нет | $x \in (-\infty; +\infty)$ | Решений нет | $x \in (-\infty; +\infty)$ |
| $a = 0, b > 0$ | Решений нет | Решений нет | $x \in (-\infty; +\infty)$ | $x \in (-\infty; +\infty)$ |
| $a = 0, b < 0$ | $x \in (-\infty; +\infty)$ | $x \in (-\infty; +\infty)$ | Решений нет | Решений нет |

Несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, которые удовлетворяют одновременно

каждому из этих неравенств (то есть если отыскиваются все общие решения этих неравенств).

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют частным решением системы неравенств.

Множество всех частных решений системы неравенств представляет собой общее решение системы неравенств (чаще говорят просто «решение системы неравенств»).

Решить систему неравенств — значит найти все ее частные решения. Решение системы неравенств представляет собой пересечение решений неравенств, образующих систему.

Решение систем линейных неравенств

Алгоритм решения системы линейных неравенств с одной переменной:

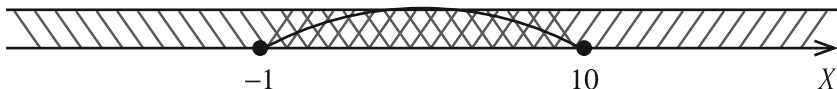
1. Решить первое неравенство, найти его промежутки значений.
2. Решить второе неравенство, найти промежутки значений второго неравенства.
3. Найти пересечение двух множеств (множества решений первого неравенства и множества решений второго неравенства).

Пример № 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x+5>2, \\ 4x-15\leq 25. \end{cases}$$

Решение:

1. Рассмотрим первое неравенство:
 $3x+5>2$, $3x>2-5$, $3x>-3$, $x>-1$.
2. Решим второе неравенство системы:
 $4x-15\leq 25$, $4x\leq 25+15$, $4x\leq 40$, $x\leq 10$.
3. Теперь смотрим, пересекаются ли эти два промежутка $x\in(-1;+\infty)$ и $x\in(-\infty;10]$ (если нет — то и решений системы нет).



В ответ записываем числовой промежуток, который является *пересечением штриховки*.

4. Таким образом, конечное множество решений (лежащее на пересечении множеств решений каждого из неравенств):
 $x \in (-1; 10]$.

Ответ: $x \in (-1; 10]$.

Система линейных неравенств может не иметь решений, то есть быть *несовместной*. Например, система

$$\begin{cases} x > 12, \\ x < -5; \end{cases}$$

не имеет решений, так как x не может одновременно быть меньше минус пяти, но больше двенадцати.

2.2.6. Системы неравенств с одной переменной

Для решения системы неравенств с одной переменной к каждому неравенству применяют те же методы, которые были рассмотрены при решении неравенств, а затем ищут пересечение множеств решений неравенств.

Пример № 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 2 \cdot 5^x - 3 \geq 0, \\ \log_{\frac{2}{5}} x + \log_{\frac{2}{5}} x \leq 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Рассмотрим первое неравенство системы

$$25^x - 2 \cdot 5^x - 3 \geq 0.$$

Оно является показательным и сводится к квадратному методом введения новой переменной.

Пусть $t = 5^x$, заметим, что $t > 0$, так как $5^x > 0$ при любых действительных значениях x . Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$t^2 - 2t - 3 \geq 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена $t^2 - 2t - 3$, для этого решим уравнение

$$t^2 - 2t - 3 = 0,$$

$$t_1 = -1; t_2 = 3.$$

Графиком функции $y = t^2 - 2t - 3$ является парабола, ветви которой направлены вверх, поэтому решением неравенства $t^2 - 2t - 3 \geq 0$ будут два числовых промежутка $t \in [3; +\infty)$.

Учитывая условие $t > 0$, сделаем обратную замену переменной: $5^x \geq 3$, то есть $5^x \geq 5^{\log_5 3}$, основание степени больше 1, следовательно, знак неравенства не меняется: $x \geq \log_5 3$.

2. Рассмотрим второе неравенство системы

$$\log_{\frac{2}{5}} x + \log_{\frac{5}{2}} x \leq 2.$$

Оно является логарифмическим и тоже сводится к квадратному методом введения новой переменной.

Пусть $t = \log_{\frac{2}{5}} x$, тогда второе неравенство примет вид:

$$t^2 + t - 2 \leq 0, \text{ его решением является отрезок } t \in [-2; 1].$$

Выполняя обратную замену переменной, получим двойное неравенство $-2 \leq \log_{\frac{2}{5}} x \leq 1$.

Основание логарифма меньше 1, поэтому знак неравенства не меняется: $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{9}{4}$.

3. Найдем пересечение множеств решений неравенств:

$$x \in [\log_5 3; +\infty) \text{ и } x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{9}{4} \right].$$

Заметим $\log_5 3 < 1$, а $\frac{9}{4} > 1$, следовательно, $\log_5 3 < \frac{9}{4}$.

Осталось сравнить $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$.

$$\frac{2}{3} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \log_5 \sqrt[3]{25}, \log_5 3 = \log_5 \sqrt[3]{27}.$$

$$\sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27}, \text{ тогда } \log_5 \sqrt[3]{27} < \log_5 \sqrt[3]{25},$$

$$\text{следовательно, } \frac{2}{3} < \log_5 3.$$

Следовательно, решением заданной системы неравенств являются все значения из отрезка $\left[\log_5 3; \frac{9}{4}\right]$.

Ответ: $x \in \left[\log_5 3; \frac{9}{4}\right]$.

2.2.7. Равносильность неравенств, систем неравенств

Два **неравенства** называются **равносильными**, если множества их решений совпадают (в том числе неравенства, не имеющие решений, считаются равносильными).

Обозначение: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow P(x) > h(x)$.

Если все решения первого неравенства являются решениями второго неравенства (множество решений первого неравенства является подмножеством решений второго неравенства), то второе неравенство называется **следствием** первого неравенства.

Обозначение: $f(x) > g(x) \Rightarrow P(x) > h(x)$.

Таким образом, два неравенства равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Теоремы о равносильности неравенств:

1. Если любое выражение, входящее в неравенство, заменить тождественно равным ему на области определения неравенства выражением, то получим неравенство, равносильное данному.
2. Если к обеим частям неравенства прибавить выражение, имеющее смысл на области определения неравенства, то получим неравенство, равносильное данному.

Следствие. Если любое слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, поменяв его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

3. Если обе части неравенства умножить (разделить) на выражение, имеющее смысл и положительное на области определения неравенства, то получим неравенство, равносильное данному.

4. Если обе части неравенства умножить (разделить) на выражение, имеющее смысл и отрицательное на области определения неравенства, и при этом поменять знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Рациональные неравенства можно преобразовать, используя свойства неравенств, и получить равносильные:

$$\frac{A}{B} > 0 \text{ равносильно } A \cdot B > 0;$$

$$\frac{A}{B} < 0 \text{ равносильно } A \cdot B < 0.$$

$$\text{Так неравенство } \frac{x^2 - 9}{x + 4} < 0$$

равносильно неравенству $(x^2 - 9)(x + 4) < 0$.

Две **системы неравенств** называются **равносильными**, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам. Равносильность систем неравенств обозначается так же, как равносильность систем уравнений, то есть с помощью знака \Leftrightarrow .

Двойное неравенство $h(x) < f(x) < g(x)$ равносильно (эквивалентно) системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > h(x). \end{cases}$$

Например, неравенство $2x - 1 < x^2 - 5x - 3 < 9$ равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 3 < 9, \\ x^2 - 5x - 3 > 2x - 1. \end{cases}$$

За равносильностью преобразований нужно особенно следить при решении иррациональных неравенств, так как решение иррациональных неравенств осложняется тем обстоятельством, что здесь, как правило, исключена возможность проверки, поэтому надо стараться делать все преобразования равносильными.

Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной,

при которых все входящие в неравенство функции определены, то есть обязательно находить ОДЗ неравенства, а затем осуществлять равносильный переход на области допустимых значений.

При решении иррациональных неравенств следует помнить следующие правила:

- 1) при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, равносильное данному неравенству;
- 2) если обе части неравенства возвести в четную степень, то получится неравенство, равносильное исходному только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.

Основным методом решения иррациональных неравенств является сведение исходного неравенства к равносильной системе или совокупности систем рациональных неравенств.

Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \right. \left. \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \right.$$

Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пример № 1. Решить неравенство $\sqrt{x+18} < 2-x$.

Решение:

Система, равносильная исходному неравенству, имеет вид:

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2, \\ x+18 \geq 0, \\ 2-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 14 > 0, \\ x \geq -18, \\ x \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 7, \\ x < -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -18, \\ x \leq 2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2.$$

Ответ: $x \in [-18; -2)$.

Пример №2. Решить неравенство $\sqrt{x+2} > x+0,5$.

Решение:

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{cases} x+2 > (x+0,5)^2, \\ x+0,5 \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ x+0,5 < 0; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 < 1,75, \\ x \geq -0,5, \\ x \geq -2, \\ x < -0,5; \end{cases} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < \frac{\sqrt{7}}{2}, \\ -2 \leq x < -\frac{1}{2}; \end{cases} \right] \Leftrightarrow -2 \leq x < -\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $x \in \left[-2; \frac{\sqrt{7}}{2} \right)$.

Пример №3. Решить неравенство $\sqrt{4x-8} < \sqrt{2+x}$.

Решение:

Система, равносильная исходному неравенству, имеет вид:

$$\begin{cases} 2+x > 4x-8, \\ 4x-8 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x > -10, \\ 4x \geq 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{10}{3}, \\ x \geq 2; \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x \in \left[2; 3\frac{1}{3} \right)$.

2.2.8. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств

Использование области определения функции

Предварительный анализ области допустимых значений неизвестной неравенства иногда позволяет получить решения без преобразований неравенства.

Пример № 1. Решить неравенство $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$.

Решение:

1. Найдем область допустимых значений данного неравенства. Для этого решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ 9-x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{получим} \\ \text{систему} \end{array} \quad \begin{cases} x \geq -3, \\ x \leq 9. \end{cases} \quad , \text{ тогда ОДЗ: } x \in [-3; 9].$$

2. Разобьем область допустимых значений на два промежутка $-3 \leq x \leq 0$ и $0 \leq x \leq 9$.

Для x из промежутка $-3 \leq x \leq 0$ имеем

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x+3} \geq 0, \\ \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt[4]{9} = \sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt{3} \\ \text{на промежутке } -3 \leq x \leq 0, \end{array}$$

и поэтому исходное неравенство не имеет решений на этом промежутке.

Для x из промежутка $0 \leq x \leq 9$ имеем

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x+3} \geq \sqrt{3}, \\ \sqrt[4]{9-x} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt{3} \\ \text{на промежутке } 0 \leq x \leq 9, \end{array}$$

тогда исходное неравенство не имеет решений и на этом промежутке.

Следовательно, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt{3}$ для всех x из области допустимых значений, и, значит, исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример № 2. Решить неравенство $\sqrt{3x-9} > -5$.

Решение:

Область допустимых значений данного неравенства $x \geq 3$.

Правая часть данного неравенства отрицательна, а левая часть исходного неравенства неотрицательна при всех значениях x , при которых она определена. Это означает, что левая часть больше правой части при всех значениях x , удовлетворяющих условию $x \geq 3$.

Ответ: $x \in [3; +\infty)$.

Использование ограниченности функции

Если функция $y=f(x)$ на промежутке X ограничена снизу, причем $f_{\text{наим}}=A$, а функция $y=g(x)$ ограничена сверху, причем $g_{\text{наиб}}=A$, то неравенство $f(x) \geq g(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$$

Пример № 3. Решить неравенство

$$7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x-x^2-7) \geq 1.$$

Решение:

$$7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x-x^2-7) \geq 1.$$

ОДЗ: $6x-x^2-7 > 0$, решение квадратного неравенства $x \in (3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2})$.

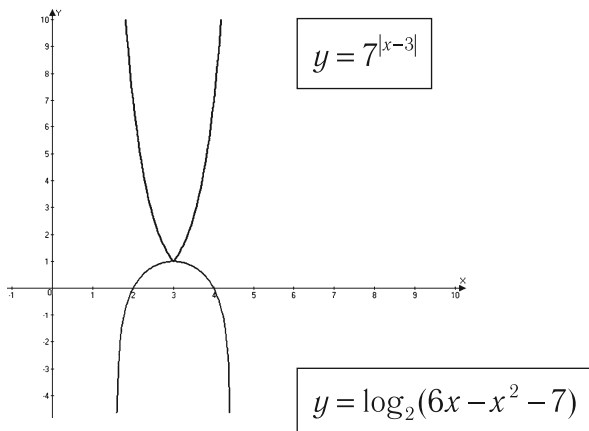
Домножим обе части неравенства на $7^{|x-3|} > 0$, при этом знак неравенства не изменится: $\log_2(6x-x^2-7) \geq 7^{|x-3|}$.

Заметим, что функция $y = \log_2 t$ монотонно возрастает на всей области определения.

Графиком функции $y = -x^2 + 6x - 7$ является парабола, ветви которой направлены вниз, наибольшее значение достигается в вершине параболы, то есть при $x=3$, тогда и наибольшее значение функции достигается при $x=3$.

$$y_{\text{наиб}} = y(3) = \log_2(18-9-7) = 1.$$

Графическая интерпретация:



Таким образом, решение исходного неравенства свелось к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(6x - x^2 - 7) = 1, \\ 7^{|x-3|} = 1. \end{cases}$$

$x = 3.$

Ответ: $x = 3.$

Использование монотонности функции

Пусть на промежутке (a, b) задана возрастающая функция $y = f(x)$ и требуется решить неравенство $f(x) < c$ (или $f(x) > c$). Если x_0 — корень уравнения $y = f(x)$, причем $a < x_0 < b$, то решения данного неравенства — весь промежуток (a, x_0) (соответственно, промежуток (x_0, b)). Единственность корня следует из монотонности $y = f(x)$. Понятно, что если требуется решить нестрогое неравенство, то при том же рассуждении в ответ войдет и число $f(x_0)$, а если функция задана на замкнутом или полуоткрытом промежутке, то в ответ войдут соответствующие концы промежутка.

Пример № 4. Решить неравенство $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} < 6$.

Решение:

1. Найдем область допустимых значений данного неравенства. Для этого решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0, \\ x-1 \geq 0; \end{cases} \text{ получим систему } \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3}, \\ x \geq 1. \end{cases}, \text{ тогда ОДЗ: } x \in [1; +\infty).$$

2. Заметим, что левая часть данного неравенства $f(x) = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}$ — возрастающая на области определения функция.
При $x=5$ левая часть равна правой.
3. Учитывая ОДЗ исходного неравенства $x \in [1; +\infty)$, рассмотрим его на промежутке $1 \leq x < 5$.
4. Имеем $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{3 \cdot 5 + 1} + \sqrt{5-1} = \sqrt{16} + \sqrt{4} = 6$, то есть данное неравенство выполняется на промежутке $1 \leq x \leq 5$.
5. При $x \geq 5$ по той же причине (из-за возрастания функции $f(x) = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}$) $f(5) \leq f(x)$, то есть данное неравенство не выполняется.
6. Так как исследование проведено при всех допустимых значениях x , то решение закончено.
Ответ: $x \in [1; 5)$.

2.2.9. Метод интервалов

Методом интервалов обычно решают неравенства вида

$$P_n(x) > 0 \text{ (} P_n(x) \geq 0, P_n(x) < 0, P_n(x) \leq 0),$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0 \text{ (} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0, \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0, \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены соответственно степеней n и m , то есть

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m.$$

В основе метода интервалов лежит следующее свойство двучлена $(x-a)$: точка $x=a$ делит числовую ось на две части: справа от точки a двучлен $(x-a) > 0$, а слева от точки $x=a$ двучлен отрицателен $(x-a) < 0$.

Метод интервалов базируется на следующей теореме: пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси и обращается в ноль в точках $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (имеет только n корней), причем $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$. Тогда на каждом из интервалов $(+\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, \dots , $(x_n; +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна и сохраняет знак.

При решении рациональных неравенств методом интервалов нужно:

- 1) все члены неравенства перенести в левую часть; если неравенство дробно-рациональное, то привести левую часть к общему знаменателю;
- 2) найти область определения и нули функции левой части неравенства;
- 3) нанести найденные точки на числовую прямую, разбивая ее при этом на интервалы, в каждом из которых рациональная функция непрерывна и сохраняет знак;
- 4) определить знак функции на любом из интервалов (лучше крайнем);
- 5) определить знаки на остальных интервалах: при переходе через точку знак меняется на противоположный, если точка является корнем нечетной степени крайности (т.е. встречается нечетное количество раз среди корней числителя и знаменателя); при переходе через точку четной кратности знак сохраняется;
- 6) множеством решения неравенства являются объединение интервалов с соответствующим знаком функции. В случае нестроого неравенства к этому множеству добавляются корни числителя.

Пример № 1. Решить неравенство $\frac{(x-2)(x-6)^2 x}{(x+15)(x+1)^4} \geq 0$.

Решение:

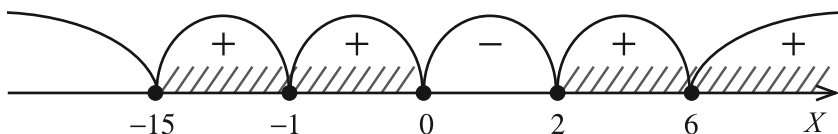
Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x-2)(x-6)^2 x}{(x+15)(x+1)^4}$.

Область определения функции

$x \in (-\infty; -15) \cup (-15; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Найдем нули функции: $(x-2)(x-6)^2 x = 0$,
 $x=2$, $x=6$, $x=0$.

Отметим найденные точки на числовой прямой, она разбивается на 6 интервалов, на каждом из которых рациональная функция непрерывна и сохраняет свой знак. Точки $x=2$, $x=6$, $x=0$ — черные (закрашенные), точки $x=-15$, $x=-1$ — выколотые. При $x>6$ функция принимает положительные значения. Знак функции не будет меняться при переходе через точки четной кратности, то есть через -1 и 6 , при переходе через -15 и 0 знак функции меняется:



$$x \in (-15; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-15; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty).$

Метод интервалов используется при решении показательных, логарифмических неравенств. Покажем использование метода интервалов на примере решения показательного неравенства.

Пример №2. Решить неравенство $(0,7)^{\frac{x}{x-2}} < (0,7)^{\frac{6}{x-1}}$.

Решение:

$$(0,7)^{\frac{x}{x-2}} < (0,7)^{\frac{6}{x-1}}.$$

Так как основание степеней $0 < 0,7 < 1$, основание степени больше нуля, но меньше единицы, то при переходе к выражениям, стоящим в показателе, знак неравенства меняется на противоположный:

$$\frac{x}{x-2} > \frac{6}{x-1}.$$

Перенесем все в левую часть неравенства и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{6}{x-1} > 0,$$

$$\frac{x(x-1)-6(x-2)}{(x-2)(x-1)} > 0,$$

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{(x-2)(x-1)} > 0.$$

Квадратный трехчлен $x^2 - 7x + 12$ имеет корни 3 и 4, поэтому $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, и неравенство принимает вид:

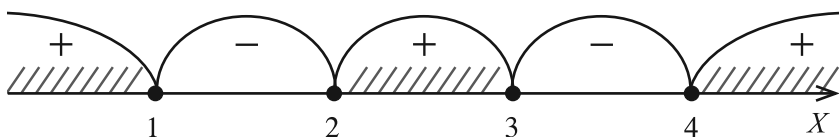
$$\frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-1)} > 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-1)}$.

Область определения функции $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Нули функции: $x=3$, $x=4$.

Отметим найденные точки на числовой прямой, она разбивается на 5 интервалов, на каждом из которых функция непрерывна и сохраняет свой знак. Неравенство строгое, поэтому все точки выколотые. Знак функции на интервалах будет чередоваться. При $x > 4$ функция принимает положительные значения.



$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty).$$

2.2.10. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем

Графиком неравенства с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого неравенства.

Система неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{задает первую координатную четверть (правая верхняя).}$$

Координаты любой точки первой четверти удовлетворяют каждому неравенству данной системы.

Аналогично система неравенств

$$\begin{cases} x < 0, \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{задает вторую координатную четверть} \\ \text{(левая верхняя).} \end{array}$$

Система неравенств

$$\begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{задает третью координатную четверть} \\ \text{(левая нижняя).} \end{array}$$

Система неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ y < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{задает четвертую координатную четверть} \\ \text{(правая нижняя).} \end{array}$$

Решением системы неравенств может являться прямая, например:

$$\begin{cases} y \geq x, \\ y \leq x. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Решением данной системы является} \\ \text{прямая } y = x. \end{array}$$

Рассмотрим неравенство с двумя переменными одного из следующих видов: $y > f(x)$, $y \geq f(x)$, $y < f(x)$, $y \leq f(x)$. Для изображения множества решений такого неравенства на координатной плоскости можно применять следующий алгоритм:

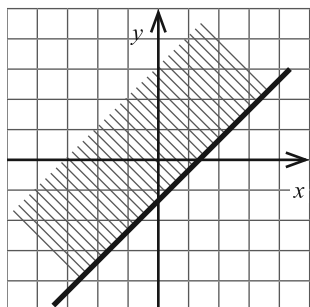
1. Построить график функции $y = f(x)$, который разбивает плоскость на две области.
2. Выбрать любую из полученных областей и рассмотреть в ней произвольную точку. Проверить выполнимость исходного неравенства для этой точки. Если в результате проверки получается верное числовое неравенство, то исходное неравенство выполняется во всей области, которой принадлежит выбранная точка. Таким образом, множество решений неравенства — область, которой принадлежит выбранная точка. Если в результате проверки получается неверное числовое неравенство, то множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.
3. Если неравенство строгое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, не вклю-

чаем во множество решений и границу изображаем пунктиром. Если неравенство нестрогое, то границы области, то есть точки графика функции $y=f(x)$, включаем во множество решений данного неравенства, и границу в таком случае изображаем сплошной линией.

Рассмотрим неравенство

$$ax+b+c \geq 0.$$

Уравнение $ax+b+c=0$ задает прямую, разбивающую плоскость на две полуплоскости. Штриховкой показана полуплоскость, которая является решением неравенства.



Пример № 1

Какое множество точек задается неравенством $x \cdot y \leq 2$?

Решение:

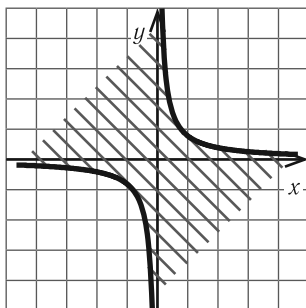
- 1) Строим график уравнения $x \cdot y = 2$. Для этого сначала преобразуем его. Очевидно, что x в данном случае не обращается в 0, так как иначе мы бы имели $0 \cdot y = 2$, что неверно. Значит, можем разделить наше уравнение на x . Получим:

$$y = \frac{2}{x}.$$

Графиком данной функции является гипербола, ветви которой расположены в первой и третьей координатных четвертях. Гипербола разбивает всю плоскость на две области: ту, что между ветвями гиперболы, и ту, что снаружи их.

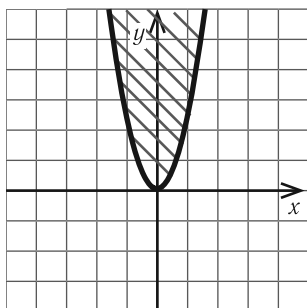
- 2) Выберем из первой области произвольную точку, например (3; 5). Проверяем неравенство: $3 \cdot 5 \leq 2$ — неверно. Значит, точки данной области не удовлетворяют исходному неравенству. Тогда можем сделать вывод о том, что множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.
- 3) Так как неравенство нестрогое, то граничные точки, то есть точки графика функции $y = \frac{2}{x}$, рисуем сплошной линией.

Заштрихуем множество точек, которое задает исходное неравенство.

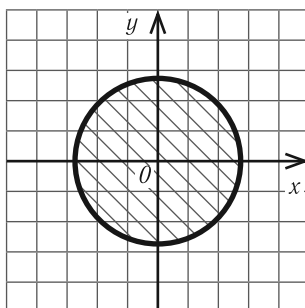


Примеры графического решения неравенства с двумя переменными

Множество точек плоскости, задаваемое неравенством $y \geq x^2$:



Множество точек плоскости, задаваемое неравенством $x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0$:



Пример № 2

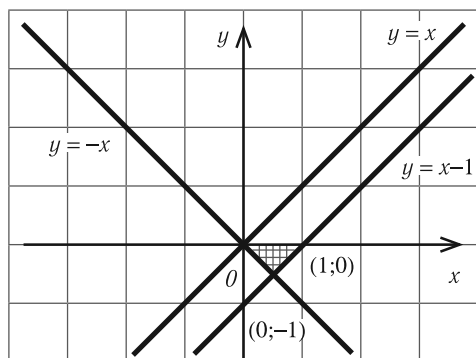
Изобразить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} y \leq x, \\ y \geq x - 1, \\ y \geq -x, \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Решение:

Строим графики уравнений $y = x$, $y = -x$, $y = x - 1$, $y = 0$.

Штриховкой отмечена область, являющаяся пересечением областей решения неравенств системы.



Пример № 3

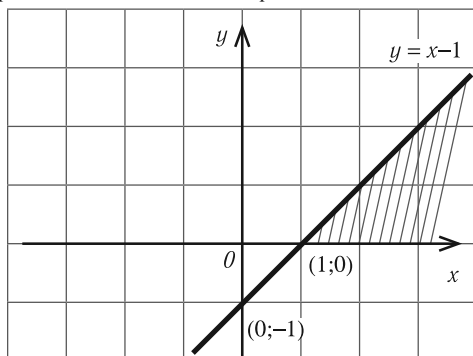
Изобразить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} y \leq x - 1, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Решение:

Строим графики уравнений $y = x - 1$ и $y = 0$.

Штриховкой отмечена область, являющаяся пересечением областей решения неравенств системы.



3. ФУНКЦИИ

3.1. Определение и график функции

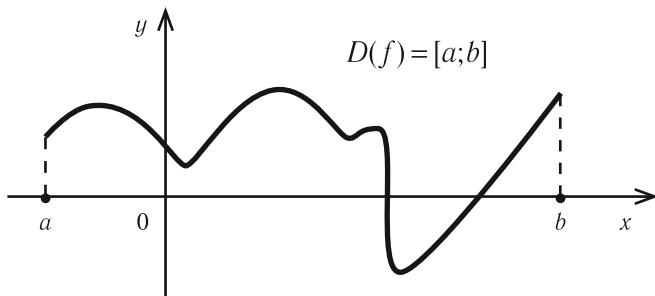
3.1.1. Функция, область определения функции

Если даны числовое множество X и правило f , позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y , то говорят, что задана **функция** $y = f(x)$ с областью определения X ; пишут

$$y = f(x), x \in X.$$

При этом переменную x называют **независимой переменной или аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной**.

Областью определения функции $y=f(x)$ называется множество значений x , при которых формула имеет смысл. Обозначение — $D(f)$.



Пример № 1

Найти область определения функции $y = \frac{1}{\cos x + 1}$.

Решение:

$\cos x + 1 \neq 0$, тогда $\cos x \neq -1$, то есть $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

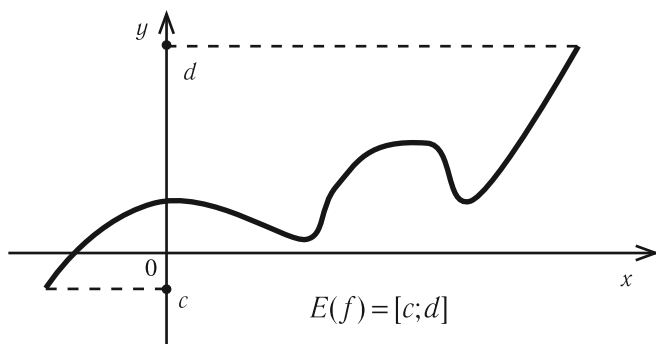
Ответ: $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Нельзя говорить о функции $y=f(x)$ без указания ее области определения, которая или указывается явно, или подразумевается — в случае, если область определения функции $y=f(x)$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$ (такую область определения иногда называют естественной).

3.1.2. Множество значений функции

Множество всех значений функции $y=f(x)$, $x \in X$ называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$.

Если известен график функции, то область значений функции найти сравнительно нетрудно. Для этого достаточно спроецировать график на ось ординат. То числовое множество, геометрическая модель которого получится на оси ординат в результате указанного проецирования, и будет представлять собой $E(f)$.



Пример № 1

Найти множество значений функции $y = x^2 + 4x + 3$.

Решение:

Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как старший коэффициент положителен. Следовательно, наименьшее значение функция принимает в вершине параболы. Найдем координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2; \quad y_0 = y(x_0) = -1.$$

Функция непрерывна, может принимать все значения большие или равные -1 . Таким образом, множество значений данной функции: $y \in [-1; +\infty)$.

Ответ: $y \in [-1; +\infty)$.

3.1.3. График функции.

Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях

Графиком функции называется множество всех таких точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

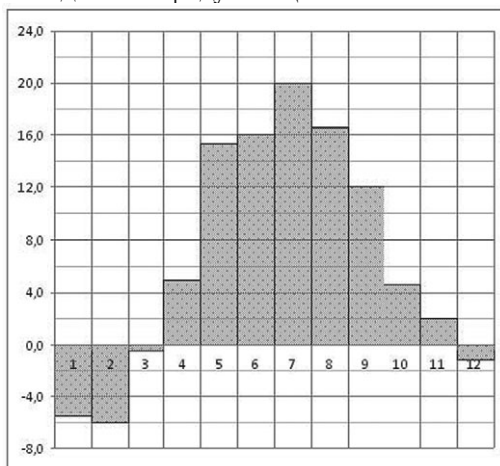
Для успешного решения задач типа В2 необходимо уметь описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках. Рассмотрим несколько примеров.

Пример № 1. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднемесячная температура в Сочи в 1920 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: 24.

Пример № 2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 2003 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

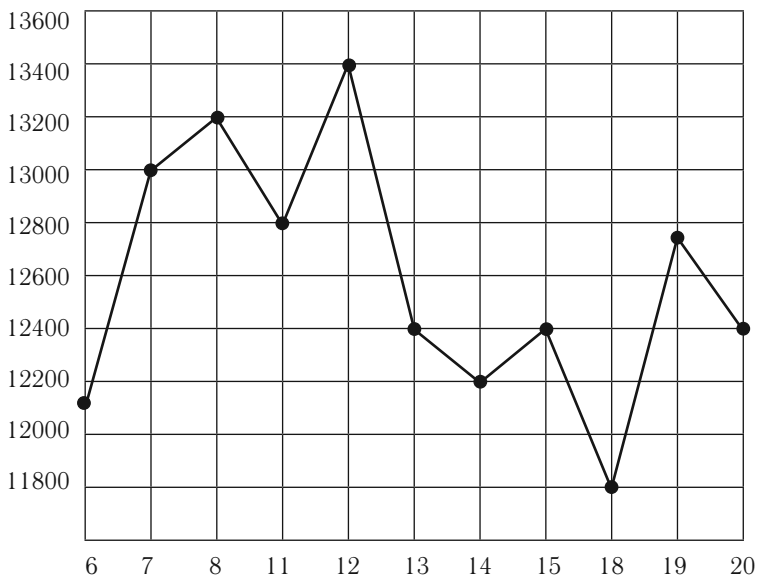


Наибольшая температура — $+20^{\circ}\text{C}$, наименьшая — -6°C .
Разность между наибольшей и наименьшей температурами $20 - (-6) = 26$.

Ответ: 26.

Пример № 3

На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену никеля на момент закрытия торгов в период с 7 по 15 мая (в долларах США за тонну).



Ответ: 12000.

3.1.4. Обратная функция.

График обратной функции

Пусть задана функция $y=f(x)$, $x \in D$. Тогда каждому числу x_0 из области определения соответствует единственное число y_0 , которое находится по заданному правилу $y_0=f(x_0)$. Иногда приходится решать обратную задачу: по значению функции y_0 находить

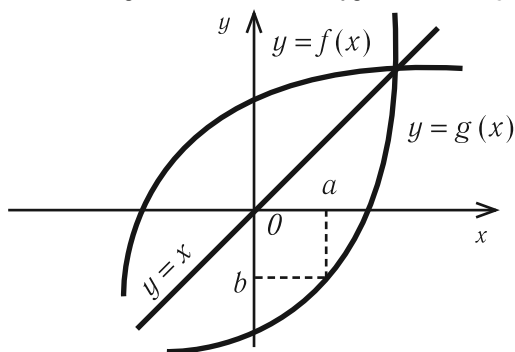
значение аргумента x_0 , то есть решать уравнение $f(x_0)=y_0$ относительно переменной x . Полученное уравнение может иметь одно или несколько, а может быть, бесконечное количество решений. Решениями являются абсциссы всех точек, в которых график $y=f(x)$ пересекается с прямой $y=y_0$.

Если функция f такова, что каждому значению $y_0 \in E$ соответствует только одно значение x_0 из области определения D , то эту функцию называют **обратимой**. Для такой функции каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение аргумента x из области определения D . Это соответствие определяет функцию, которую называют **обратной** к функции f .

Пусть функция g обратная к функции f . Тогда множество значений функции f является областью определения функции g , а область определения функции f является множеством значений функции g .

Если функция g является обратной к функции f , то функция g будет являться обратной функцией. А функция f будет обратной к функции g . Обычно говорят, что две функции f и g взаимно обратные друг к другу.

График функции f и обратной к ней функции g будут симметричны относительно прямой, заданной уравнением $y=x$.



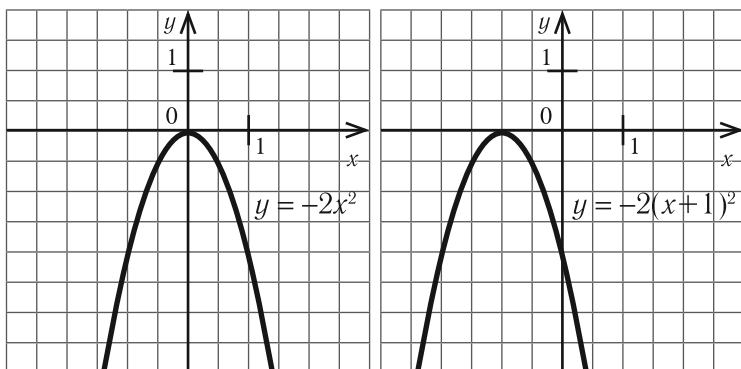
Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a; b]$, то на отрезке $[f(a); f(b)]$ определена функция $x=g(y)$, обратная к f , непрерывная и строго возрастающая.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго убывает на отрезке $[a; b]$, то на отрезке $[f(a); f(b)]$ определена функция $x=g(y)$, обратная к f , непрерывная и строго убывающая.

3.1.5. Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат

1. Параллельный перенос графика вдоль координатных осей

1. Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=f(x+t)$. Для этого необходимо осуществить параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси абсцисс на t единичных отрезков вправо, если $t < 0$; влево, если $t > 0$.



2. Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=f(x)+t$. Для этого необходимо осуществить параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси ординат на t единичных отрезков вверх, если $t > 0$, вниз, если $t < 0$.

2. Отражение графика

1. Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=f(-x)$. Для этого необходимо график функции $y=f(x)$ симметрично отобразить относительно оси **ординат**.
2. Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=-f(x)$. Для этого необходимо график функции $y=f(x)$ симметрично отобразить относительно оси **абсцисс**.

3. Сжатие и растяжение графика

1. Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=f(kx)$. Для этого необходимо выполнить следующие преобразования графика функции $y=f(x)$:
 - при $k>1$ — сжатие графика к оси ординат в k раз,
 - при $0<k<1$ — растяжение графика от оси ординат в k раз.
2. Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=kf(x)$. Для этого необходимо выполнить следующие преобразования графика функции $y=f(x)$:
 - при $k>1$ — растяжение графика от оси абсцисс в k раз,
 - при $0<k<1$ — сжатие графика к оси абсцисс в k раз.

4. Преобразование графика с модулем

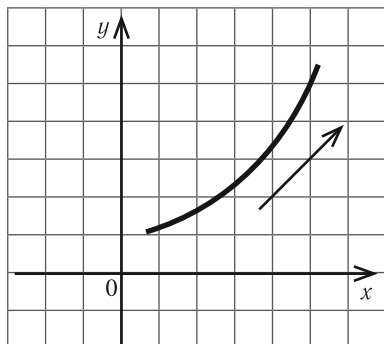
1. Для построения графика $y=|f(x)|$ нужно сохранить части графика $y=f(x)$, находящиеся над осью абсцисс, а части графика $y=f(x)$, находящихся под осью абсцисс, отразить симметрично относительно оси абсцисс.
2. График функции $y=f(|x|)$ симметричен относительно оси ординат; при этом для неотрицательных значений аргумента x он совпадает с графиком $y=f(x)$.

3.2. Элементарное исследование функций

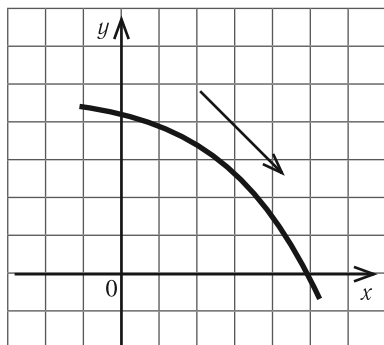
3.2.1. Монотонность функций.

Промежутки возрастания и убывания

Функцию $y=f(x)$ называют возрастающей на множестве $X \in D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.



Функцию $y=f(x)$ называют убывающей на множестве $X \in D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.



На практике удобнее пользоваться следующими формулировками:

- функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует **большее** значение функции;
- функция убывает, если большему значению аргумента соответствует **меньшее** значение функции.

Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание или убывание называют исследованием функции на монотонность.

Промежутки возрастания функции — это участки оси Ox , где график идет вверх.

Промежутки убывания функции — это участки оси Ox , где график идет вниз.

Промежутки монотонности — это промежутки, на которых функция или возрастает, или убывает.

3.2.2. Четность и нечетность функций

Функцию $y=f(x)$, $x \in X$, называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

Функцию $y=f(x)$, $x \in X$, называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

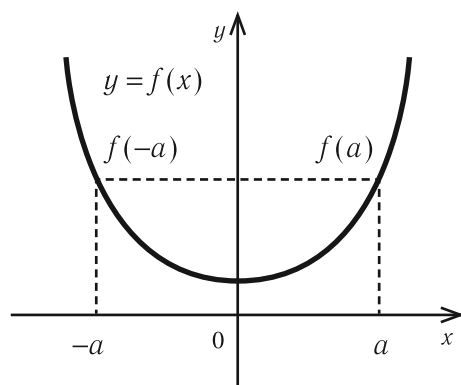
Изучение вопроса о том, является ли заданная функция четной или нечетной, обычно называют **исследованием функции на четность**.

Если функция $y=f(x)$ — четная или нечетная, то ее область определения $D(f)$ — симметричное множество. Если же $D(f)$ — несимметричное множество, то функция $y=f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, т. е. функцией общего вида.

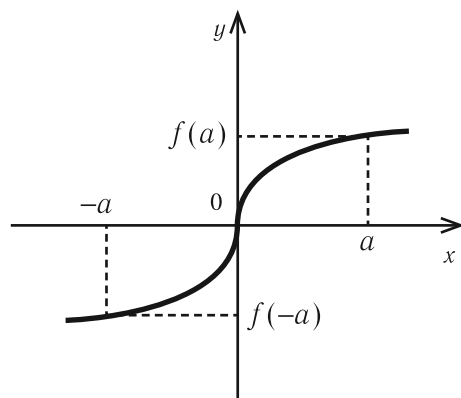
Числовое множество X называют **симметричным множеством**, если вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$. Например, $(-2;2)$; $[-120;120]$.

Геометрический смысл свойства четности и свойства нечетности функции:

- график четной функции симметричен относительно оси y ;



- график нечетной функции симметричен относительно начала координат.



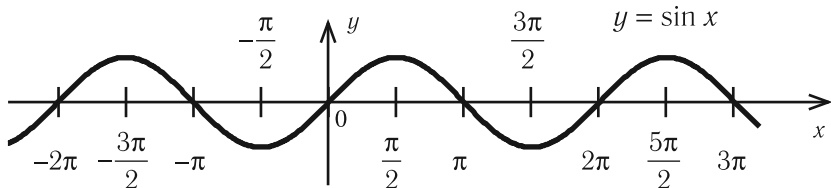
3.2.3. Периодичность функций

Очень многие процессы в окружающем нас мире имеют повторяющийся характер. Например, с течением времени повторяются день и ночь, приливы и отливы.

Такие процессы называются периодическими. Функции, которые описывают эти процессы, также называют периодическими.

Говоря о периодичности функции $f(x)$, полагают, что имеется такое число T , отличное от нуля, что область определения $D(f)$ вместе с каждой точкой x содержит и точки, получающиеся из точки x параллельным переносом вдоль оси Ox (вправо и влево) на расстояние T . Функцию $f(x)$ называют периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения значения этой функции в точках x ; $x-T$; $x+T$ равны, то есть $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$.

Например, периодическими являются тригонометрические функции. Для любого числа x и любого целого числа k выполняется $\sin(x+2\pi k)=\sin x$, следовательно, $2\pi k$ — период функции синуса ($k \in \mathbb{Z}$).



Если T — основной период функции $y=f(x)$, то число $\frac{T}{a}$ является основным периодом функции $y=f(ax)$, где a — любое положительное число.

Пример № 1

Определить основной период функции $y=\sin 2x$.

Решение:

$T=2\pi$ — основной период $y=\sin x$, тогда $\frac{T}{a} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ответ: π .

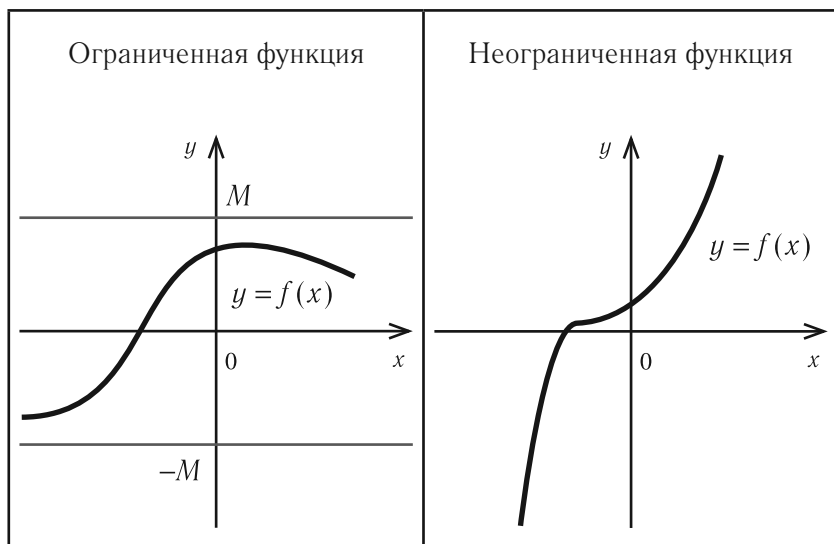
3.2.4. Ограниченность функций

Функцию $y=f(x)$ называют **ограниченной снизу** на множестве $X \in D(f)$, если все значения функции на множестве X больше некоторого числа (другими словами, если существует такое число m , что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$).

Функцию $y=f(x)$ называют **ограниченной сверху** на множестве $X \in D(f)$, если все значения функции на множестве X меньше некоторого числа (другими словами, если существует такое число M , что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$).

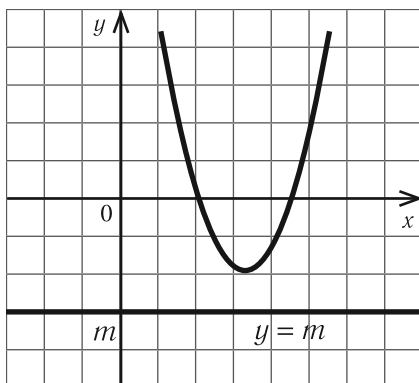
Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об ограниченности функции сверху или снизу во всей области определения.

Если функция ограничена и сверху, и снизу, то ее называют **ограниченной**.

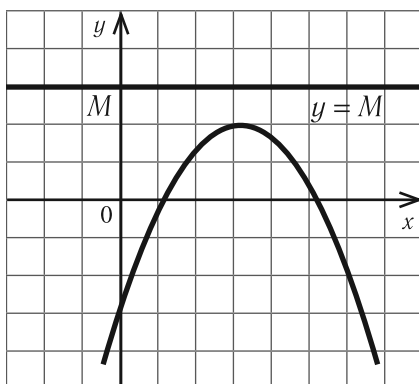


Ограниченность функции легко прочитывается по ее графику:

- если функция ограничена снизу, то ее график целиком расположен выше некоторой горизонтальной прямой $y=m$;



- если функция ограничена сверху, то ее график целиком расположен ниже некоторой горизонтальной прямой $y=M$.



3.2.5. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции

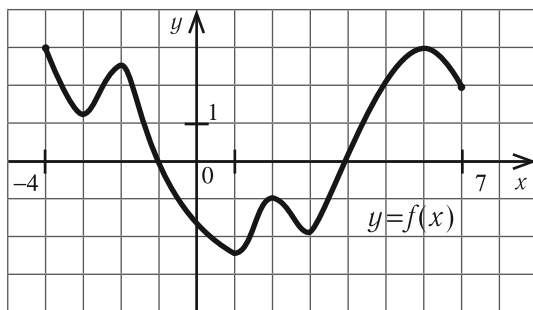
Точки, в которых достигается максимум или минимум функции, называются **точками экстремума**.

- Точка a называется точкой максимума функции $f(x)$, если существует такая ε -окрестность точки a , что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство $f(a) \geq f(x)$.
- Точка a называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует такая ε -окрестность точки a , что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство $f(a) \leq f(x)$.

В *точке экстремума* происходит смена характера монотонности функции. Так, слева от *точки экстремума* функция может возрастать, а справа — убывать (или наоборот). *Точка экстремума* должна быть внутренней точкой области определения.

В экзаменационной работе задачи по данной теме — это задания В8.

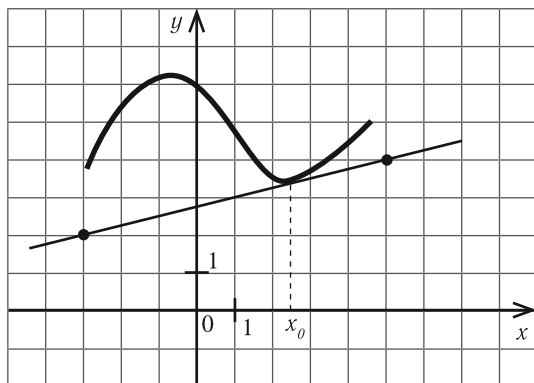
Пример № 1. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-4;7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Решение: касательная к графику функции в точке экстремума параллельна оси Ox . На указанном интервале имеется 6 таких точек: $-3; -2; 1; 2; 3; 6$. Найдём сумму этих точек, она равна 7.

Ответ: 7.

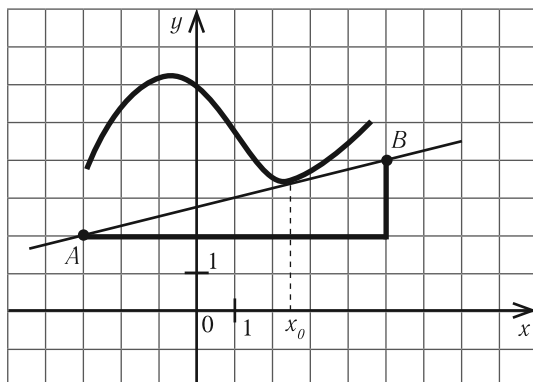
Пример № 2. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Решение:

Помним, что значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной. По рисунку видно, что

касательная к функции $f(x)$ в точке x_0 проходит через точки с координатами $(-3; 2)$ и $(5; 4)$. Построим прямоугольный треугольник, две вершины которого находятся в этих точках. Найдем тангенс острого угла прямоугольного треугольника: $\operatorname{tg} A = 2 : 8 = 0,25$.



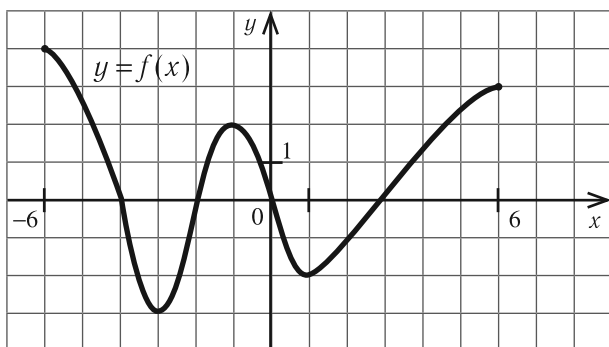
Ответ: 0,25.

3.2.6. Наибольшее и наименьшее значения функции

Число m называют наименьшим значением функции $y=f(x)$ на множестве $X \in D(f)$, если:

- 1) в X существует такая точка x_0 , что $f(x_0)=m$;
- 2) для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Пример № 1. По графику некоторой функции определить ее наименьшее значение.

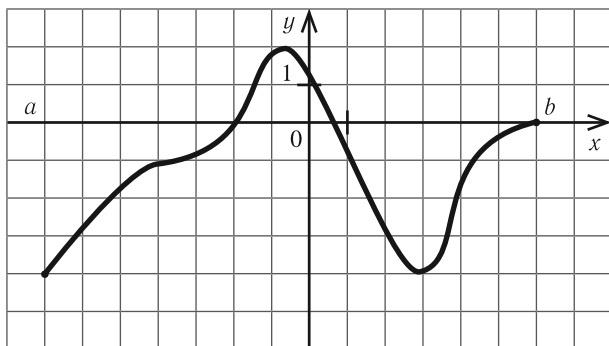


Ответ: $y_{\text{наим}} = -3$.

Число m называют наибольшим значением функции $y=f(x)$ на множестве $X \in D(f)$, если:

- 1) в X существует такая точка x_0 , что $f(x_0)=M$;
- 2) для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Пример № 2. По графику некоторой функции определить ее наибольшее значение.



Ответ: $y_{\text{наиб}}=2$.

Достаточно очевидны следующие полезные утверждения:

- Если у функции существует $y_{\text{наим}}$, то она ограничена снизу.
- Если у функции существует $y_{\text{наиб}}$, то она ограничена сверху.
- Если функция не ограничена снизу, то $y_{\text{наим}}$ не существует.
- Если функция не ограничена сверху, то $y_{\text{наиб}}$ не существует.

Наибольшее значение функции — это ордината самой высокой точки графика.

Наименьшее значение функции — это ордината самой низкой точки графика.

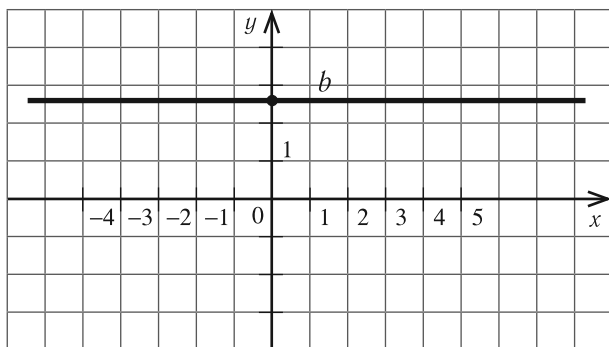
3.3. Основные элементарные функции

3.3.1. Линейная функция, ее график

Линейной функцией называется функция вида $y=kx+b$, заданная на множестве всех действительных чисел. Коэффициент k называется угловым коэффициентом (действительное число), b — свободный член (действительное число).

Если $k=0$, получим постоянную функцию $y=b$, график которой есть прямая, параллельная оси Ox , проходящая через точку с координатами $(0; b)$.

$$y = b, k = 0$$

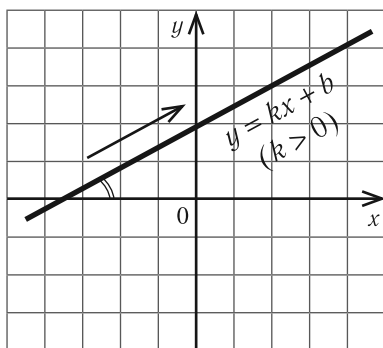


Если $b=0$, то линейная функция имеет вид $y=kx$ и называется **прямой пропорциональностью**. Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат. Для построения графика прямой пропорциональности достаточно отметить какую-либо точку графика, отличную от начала координат, и провести через эту точку и начало координат прямую.

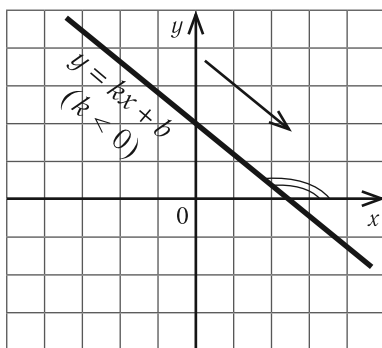
Свойства линейной функции:

1. Область определения линейной функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений линейной функции:
если $k \neq 0$, то $y \in (-\infty; +\infty)$,
если $k = 0$, то область значений состоит из числа b .
3. Точки пересечения с осями координат:
с осью Ox : $y=0$, $kx+b=0$, $x=-\frac{b}{k}$, следовательно $(-\frac{b}{k}; 0)$ — точка пересечения с осью абсцисс;
с осью Oy : $x=0$, $y=b$, следовательно $(0; b)$ — точка пересечения с осью ординат.
4. Монотонность функции $y=kx+b$ зависит от коэффициента k :

если $k > 0$,
то линейная функция
 $y = kx + b$ возрастает



если $k < 0$,
то линейная функция
 $y = kx + b$ убывает



5. Графиком линейной функции является **прямая**.

Так как прямая определяется двумя ее точками, то для построения графика функции $y = kx + b$ достаточно построить две точки этого графика.

Для построения графика линейной функции иногда удобно находить точки пересечения этого графика с осями координат.

График функции $y = kx + b$ получается сдвигом графика функции $y = kx$ на b единиц вдоль оси ординат. Графиками функций $y = kx$ и $y = kx + b$ являются параллельные прямые.

Взаимное расположение графиков линейных функций

Графики линейных функций, заданных формулами вида $y = kx + b$, пересекаются, если коэффициенты при x различны, и параллельны, если коэффициенты при x одинаковы.

3.3.2. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, ее график

Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где k — число, отличное от нуля.

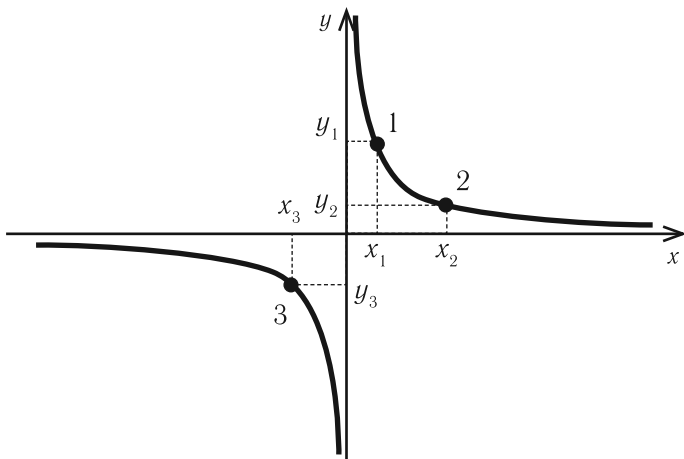
Относительно переменной y говорится, что она обратно пропорциональна переменной x (при увеличении аргумента x значение функции y уменьшается).

Так как выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при любом значении x , кроме 0, то областью определения функции, задаваемой формулой $y = \frac{k}{x}$, может служить множество всех чисел, отличных от нуля, или какое-нибудь его подмножество.

Из формулы $y = \frac{k}{x}$ следует, что $xy = k$.

Верно и обратное: если $xy = k$ ($k \neq 0$), то $y = \frac{k}{x}$.

Графиком обратной пропорциональности является *гипербола*, оси координат — *асимптоты* гиперболы.



Если коэффициент обратной пропорциональности k — положительное число, то ветви гиперболы располагаются в I и III координатных углах, если k — отрицательное число, то во II и IV координатных углах.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$:

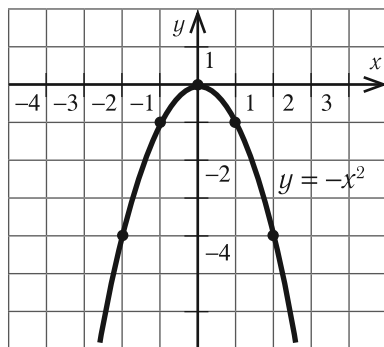
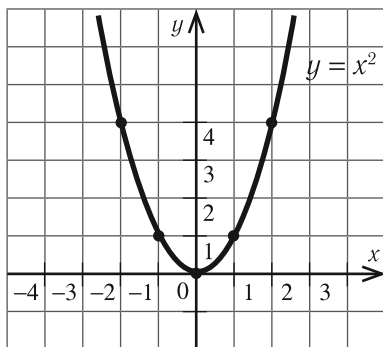
1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Множество значений функции: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. Точек пересечения с осями нет. Координатные оси — асимптоты гиперболы.

4. Монотонность функции зависит от коэффициента k :
 - если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает;
 - если $k < 0$, то линейная функция $y = \frac{k}{x}$ убывает.
5. Неограниченная функция.
6. Непериодическая функция.
7. Нечетная функция (график симметричен относительно начала системы координат).
8. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

3.3.3. Квадратичная функция, ее график

Функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) называется квадратичной.

В частном случае $y = ax^2$ ($b = c = 0$). Графиком является *парабола*, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$. Точка O (начало координат) — вершина параболы. Ось Oy — ось симметрии параболы.



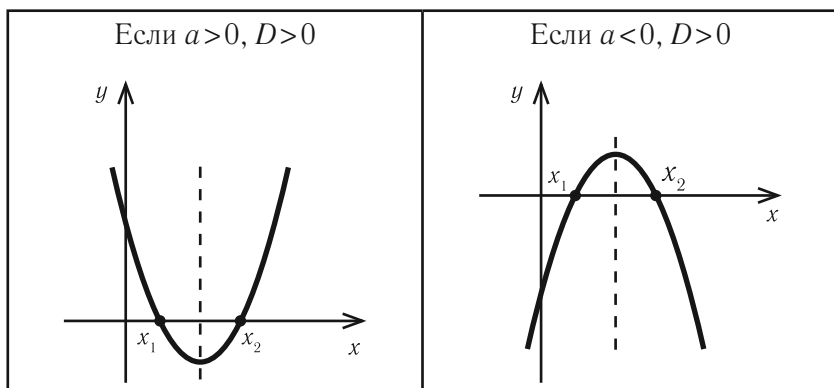
Свойства функции $y = ax^2$:

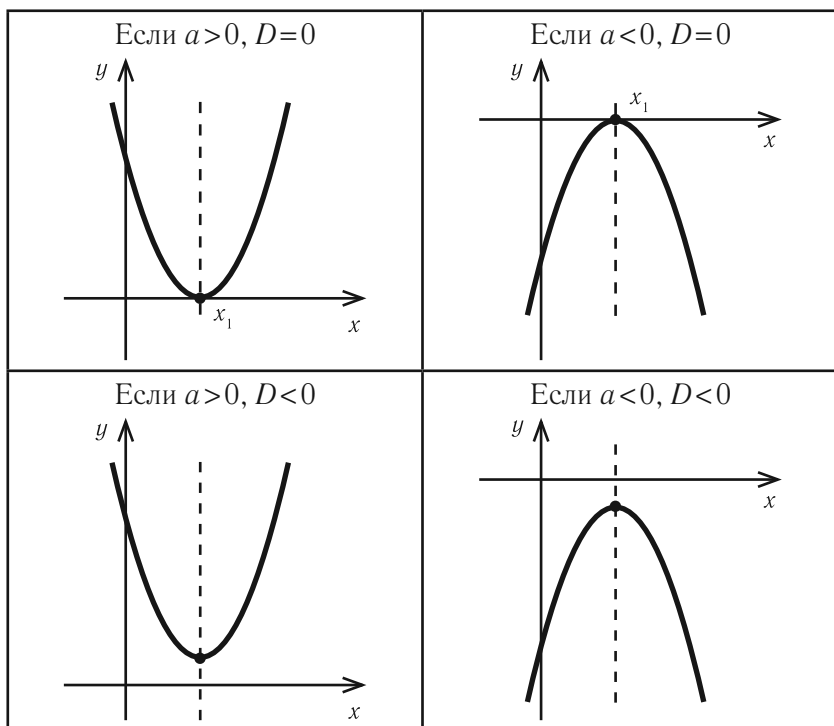
1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений функции: $y \in [0; +\infty)$.
3. Точка $(0; 0)$ — точка пересечения с осями координат.
4. Монотонность функции зависит от коэффициента a :
 - если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, функция $y = ax^2$ убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$;
 - если $a < 0$, ветви параболы направлены вниз, функция $y = ax^2$ возрастает при $x \in (-\infty; 0]$ и убывает при $x \in [0; +\infty)$.

5. Ограниченность функции:
 - функция ограничена снизу, если $a > 0$,
 - функция ограничена сверху, если $a < 0$.
6. Непериодическая функция.
7. Четная функция (график симметричен относительно оси ординат).
8. Наибольшее и наименьшее значения функции:
 - если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, то $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ — не существует,
 - если $a < 0$, ветви параболы направлены вниз, то $y_{\text{наим}}$ — не существует, $y_{\text{наиб}} = 0$.
9. Выпуклость функции:
 - если $a > 0$, парабола выпукла вниз;
 - если $a < 0$, парабола выпукла вверх.

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ также является *парабола*, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$. Координаты вершины параболы находим по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = f(x_0)$. Прямая $x = x_0$ является осью симметрии параболы.

Свойства функции и вид ее графика определяются в основном значениями коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.





Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$:

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Функция общего вида, то есть ни четная ни нечетная.
3. Ограниченность функции:
 - функция ограничена снизу, если $a > 0$;
 - функция ограничена сверху, если $a < 0$.
4. Промежутки монотонности:
 - если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, функция убывает на промежутке $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ и возрастает на промежутке $[-\frac{b}{2a}; +\infty)$;
 - если $a < 0$, ветви параболы направлены вниз, функция возрастает на промежутке $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ и убывает на промежутке $[-\frac{b}{2a}; +\infty)$.

3.3.4. Степенная функция с натуральным показателем, ее график

Функция $y=x^n$, где n — натуральное число, называется **степенной функцией** с натуральным показателем.

При $n=1$ получаем функцию $y=x$ — прямая пропорциональность, график и свойства функции мы рассматривали в пункте 3.3.1.

При $n=2$ получаем функцию $y=x^2$ — частный случай квадратичной функции, график и свойства которой мы рассматривали в пункте 3.3.3.

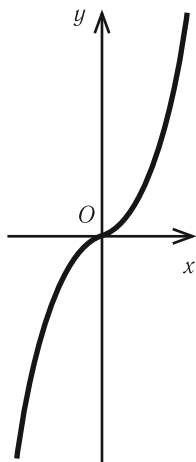
При $n=3$ получаем функцию $y=x^3$.

Функция $y=x^3$

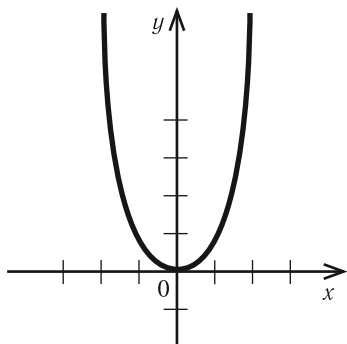
Графиком функции является кривая, которая называется *кубическая параболоа*. График расположен в I и III координатных углах.

Свойства функции $y=x^3$:

1. Область определения функции:
 $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений: $y \in (-\infty; +\infty)$.
3. Точка $(0;0)$ — точка пересечения с осями координат.
4. Возрастает на всей области определения.
5. Неограниченная функция.
6. Непериодическая функция.
7. Нечетная функция (график симметричен относительно начала системы координат).
8. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений функции.
9. Выпуклость функции:
 - выпукла вниз на промежутке $[0; +\infty)$;
 - выпукла вверх на промежутке $(-\infty; 0]$.



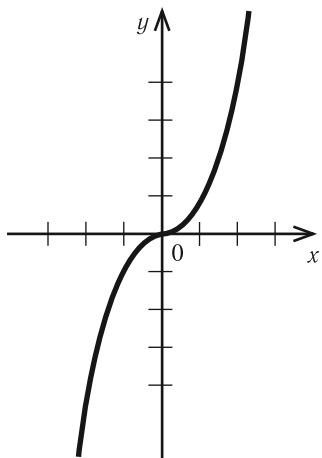
Пусть n — произвольное четное натуральное число, большее двух: $n=4, 6, 8, \dots$. В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$. График такой функции напоминает параболу $y=x^2$, только чем больше n , тем круче идут вверх ветви графика при $|x|>1$, а при $|x|<1$ приближаются к оси Ox .



Свойства функции $y=x^n$, где $n=2k$:

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений функции: $y \in [0; +\infty)$.
3. Точка $(0;0)$ — точка пересечения с осями координат.
4. Функция убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$.
5. Функция ограничена снизу.
6. Непериодическая функция.
7. Четная функция (график симметричен относительно оси ординат).
8. $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}$ — не существует.
9. Выпукла вниз.

Пусть n — произвольное нечетное число, большее трех: $n=5, 7, 9, \dots$. В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу, только чем больше значения n , тем круче вверх и вниз идут ветви графика, а на промежутке $(0; 1)$ график функции медленнее отдалется от оси Ox .



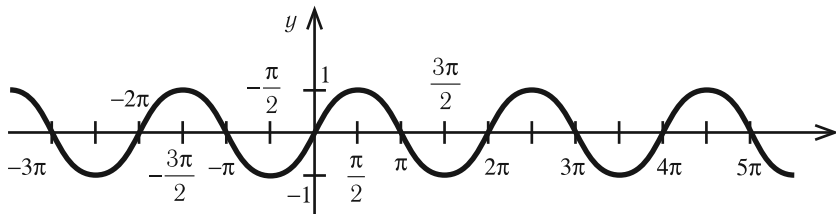
Свойства функции $y=x^n$, где $n=2k+1$:

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений: $y \in (-\infty; +\infty)$.
3. Точка $(0;0)$ — точка пересечения с осями координат.
4. Возрастает на всей области определения.
5. Неограниченная функция.
6. Непериодическая функция.
7. Нечетная функция (график симметричен относительно начала системы координат).
8. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений функции.
9. Выпуклость функции:
 - выпукла вниз на промежутке $[0; +\infty)$;
 - выпукла вверх на промежутке $(-\infty; 0]$.

3.3.5. Тригонометрическая функция, ее график

Функция $y=\sin x$

Графиком функции является синусоида.



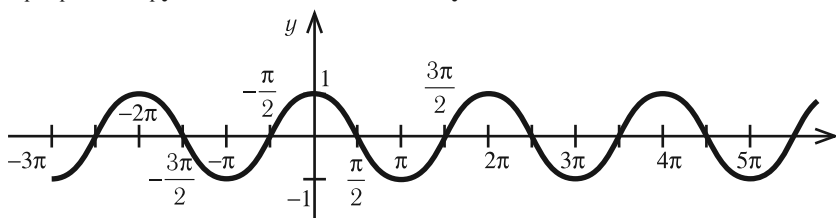
Свойства функции $y=\sin x$:

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений функции $E(f)$: $y \in [-1; 1]$.
3. Так как график функции симметричен относительно начала системы координат, следовательно, функция нечетная.
4. Функция является периодической. Наименьший положительный период: $T=2\pi$.
5. Точки пересечения с осями координат:
 - ось Ox в точках с координатами $(\pi k; 0)$ — нули функции,
 - ось Oy в точке $(0; 0)$.

6. Промежутки знакопостоянства функции:
 - функция принимает положительные значения на промежутках $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$;
 - функция принимает отрицательные значения на промежутках $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
7. Монотонность функции:
 - функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где $k \in \mathbb{Z}$;
 - функция убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где $k \in \mathbb{Z}$.
8. Экстремумы функции
 - точки минимума: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;
 - точки максимума: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Функция $y = \cos x$

График косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса влево на расстояние, равное $\frac{\pi}{2}$. Графиком функции является косинусоида.



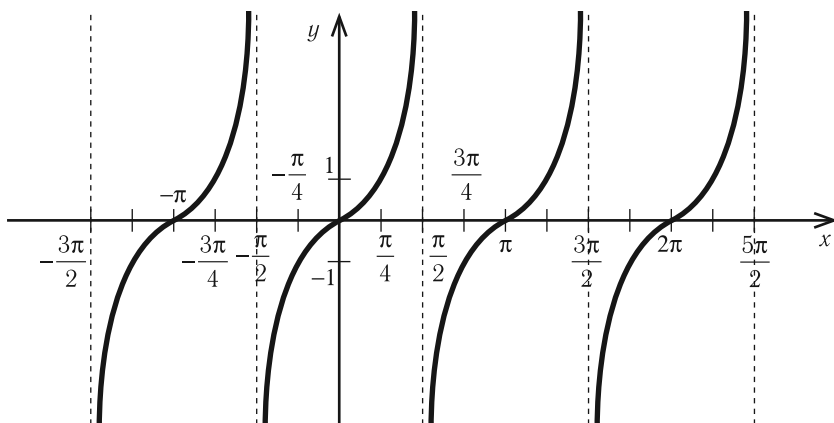
Свойства функции $y = \cos x$:

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел $D(f): x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений функции $E(f): y \in [-1; 1]$.
3. Так как график функции симметричен относительно оси Oy , следовательно, функция четная.
4. Функция является периодической. Наименьший положительный период: $T = 2\pi$.

5. Точки пересечения с осями координат:
 - ось Ox в точках с координатами $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$ — нули функции;
 - ось Oy в точке $(0; 1)$.
6. Промежутки знакопостоянства функции:
 - функция принимает положительные значения на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$;
 - функция принимает отрицательные значения на промежутках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
7. Монотонность функции:
 - функция возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, где $k \in \mathbb{Z}$;
 - функция убывает на промежутках $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, где $k \in \mathbb{Z}$.
8. Экстремумы функции
 - точки минимума: $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;
 - точки максимума: $x = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$

Графиком функции является тангенсоида.

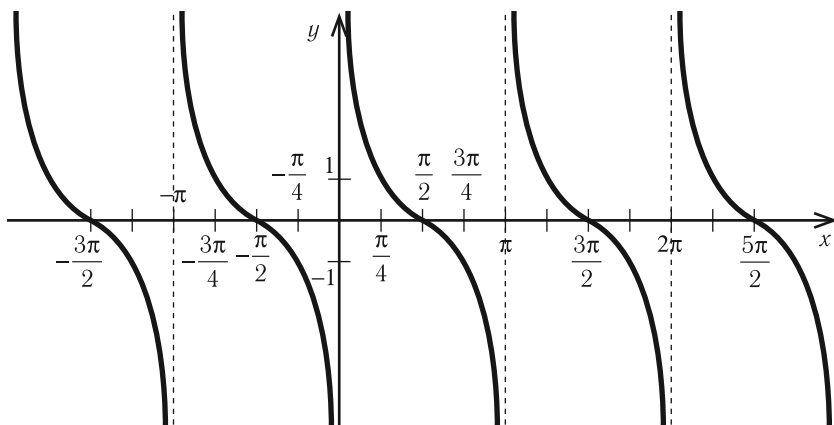


Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$:

1. Область определения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
2. Множество значений: $y \in (-\infty; +\infty)$.
3. Так как график функции симметричен относительно начала координат, то функция является нечетной.
4. Функция является периодической. Наименьший положительный период $T = \pi$.
5. График функции пересекает ось Ox в точках $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — нули функции.
Точка $(0; 0)$ — точка пересечения графика с осью Oy .
6. Функция принимает положительные значения на промежутках $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
7. Функция принимает отрицательные значения на промежутках $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k \right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
8. Функция возрастает на всей области определения, то есть на промежутках $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
9. Точек минимума и максимума нет.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Графиком функции является котангенсоида.



Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$:

1. Область определения: $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
2. Множество значений: $y \in (-\infty; +\infty)$.
3. Так как график функции симметричен относительно начала координат, то функция является нечетной.
4. Функция является периодической. Наименьший положительный период $T = \pi$.
5. График функции пересекает ось Ox
в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — нули функции.
График функции не пересекает ось Oy .
6. Функция принимает положительные значения на промежутках $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
7. Функция принимает отрицательные значения на промежутках $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k \right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
8. Функция убывает на всей области определения, то есть на промежутках $x \in (\pi k; \pi + \pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
9. Точек минимума и максимума нет.

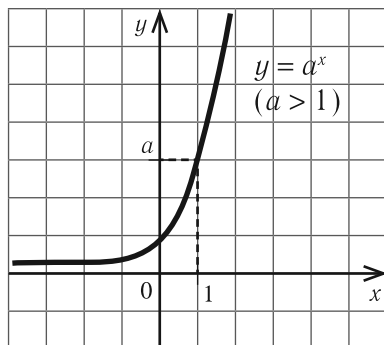
3.3.6. Показательная функция, ее график

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$ называют **показательной функцией**.

Свойства показательной функции:

Если $a > 1$

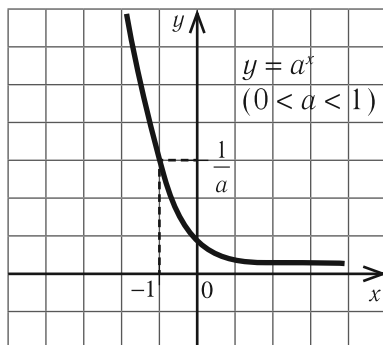
1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений функции: $y \in (0; +\infty)$.
3. Функция общего вида.
4. Возрастает на всей области определения.
5. Ограничена снизу и не ограничена сверху.



6. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна.
8. Выпукла вниз.

Если $0 < a < 1$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений функции: $y \in (0; +\infty)$.
3. Функция общего вида.
4. Убывает на всей области определения.
5. Ограничена снизу и не ограничена сверху.

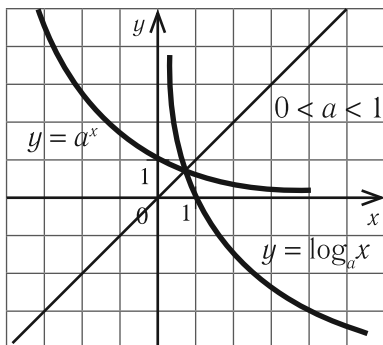
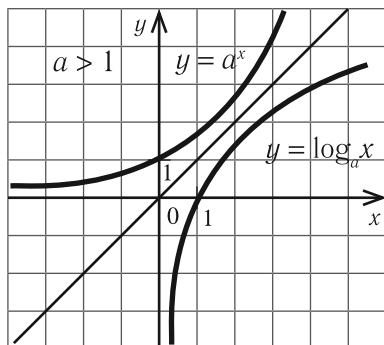


6. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна.
8. Выпукла вниз.

3.3.7. Логарифмическая функция, ее график

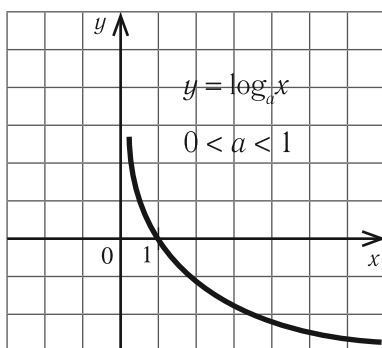
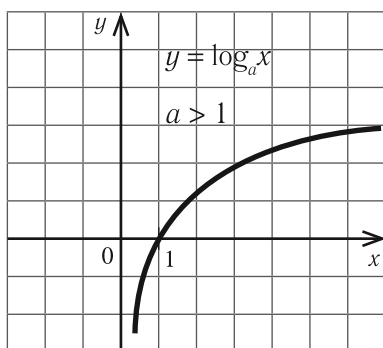
Функцию вида $y = \log_a x$, где a любое положительное число, не равное единице, называют **логарифмической функцией** с основанием a .

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной к показательной функции $y = a^x$, поэтому график логарифмической функции можно получить из графика показательной отражением относительно прямой $y = x$. Это справедливо как для возрастающих, так и для убывающих логарифмических и показательных функций.



Свойства логарифмической функции:

1. Так как каждое положительное число имеет логарифм по основанию a , то областью определения логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел: $x \in (0; +\infty)$.
2. Областью значения логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел $y \in (-\infty; +\infty)$.
3. Если основание логарифмической функции $a > 1$, то на всей области определения функция возрастает. Если для основания логарифмической функции выполняется следующее неравенство $0 < a < 1$, то на всей области определения функция убывает.



4. График логарифмической функции всегда проходит через точку $(1; 0)$.
5. Возрастающая логарифмическая функция будет положительной при $x > 1$ и отрицательной при $0 < x < 1$.
6. Убывающая логарифмическая функция будет отрицательной при $x > 1$ и положительной при $0 < x < 1$.
7. Функция не является четной или нечетной. Логарифмическая функция — функция общего вида.
8. Функция не имеет точек максимума и минимума.

4. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4.1. Производная

4.1.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю, если таковой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется **дифференцированием**. Обратный процесс — **интегрирование**.

Рассмотрим материальную точку, которая движется по прямой с переменной скоростью. Поскольку скорость точки все время меняется, мы можем говорить о ее скорости только в данный момент времени t_0 . Чтобы найти скорость точки в момент времени t_0 , рассмотрим маленький промежуток времени Δt . За этот промежуток времени точка пройдет расстояние ΔS . Тогда скорость точки будет примерно равна $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Чем меньше промежуток времени Δt мы будем брать, тем точнее значение скорости мы получим. В пределе, при $\Delta t \rightarrow 0$, мы получим точное значение мгновенной скорости в момент времени t_0 :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v.$$

Введем понятие **производной**. На некотором промежутке X определена некоторая функция $y=f(x)$. Зафиксируем некоторую точку x_0 . Значение функции в этой точке равно $f(x_0)$. Возьмем приращение аргумента Δx , значение функции в этой точке равно $f(x_0 + \Delta x)$. Получим приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

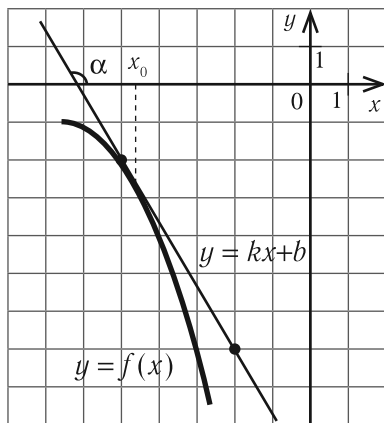
Итак, **производной функции** называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

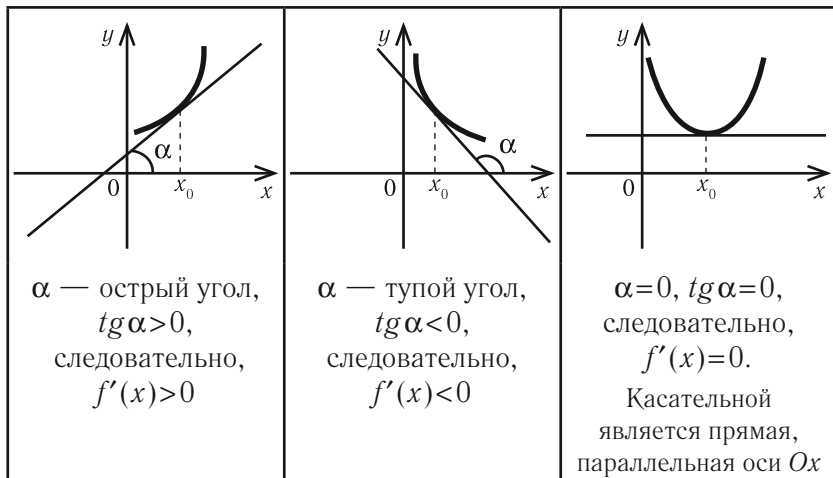
Геометрический смысл производной

Тангенс угла наклона касательной (угловой коэффициент наклона касательной), проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 , равен производной функции $y=f'(x)$ в этой точке: $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.

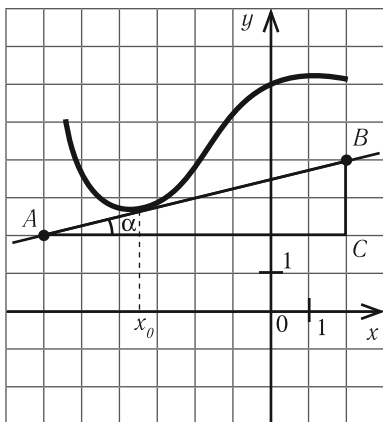
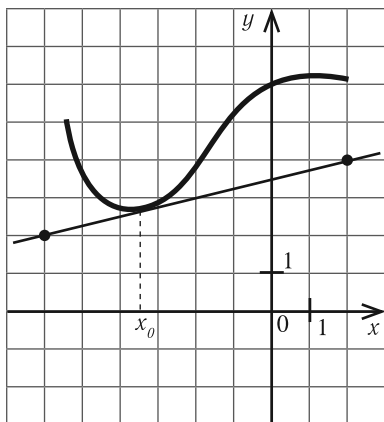
α — это угол между прямой и положительным направлением оси Ox .



Зависимость знака производной функции от угла наклона касательной:



Пример № 1. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y=f(x)$ в указанной точке.



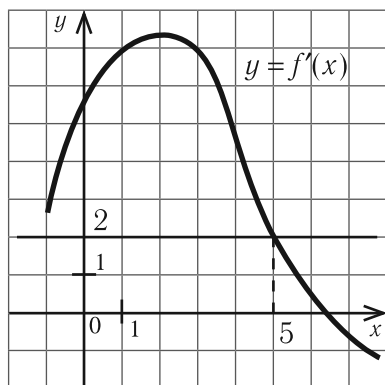
Решение:

Значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси Ox . Для того чтобы его найти, построим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной, а катеты параллельны осям координат. Получим прямоугольный треугольник ABC , длины катетов которого считаем по количеству единичных отрезков: $AC=8$, $BC=2$.

По определению, тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{8} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

Пример № 2. На рисунке изображен график $y=f'(x)$ — производной функции $y=f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y=f(x)$ параллельна прямой $y=2x-2$ или совпадает с ней.



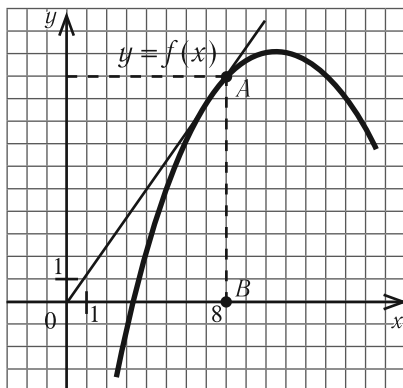
Решение:

В задаче требуется найти x_0 . Помним о том, что угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания: $k=f'(x_0)$. Уравнение прямой $y=2x-2$, то есть $k=2$. По рисунку находим, при каком значении x_0 $f'(x_0)=2$.

В данном случае $x_0=5$.

Ответ: 5.

Пример № 3. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите значение производной функции в точке $x_0=8$.



Решение:

Производная функции в точке касания равна тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

Проведем прямую, проходящую через начало координат и через точку с абсциссой, равной 8.

Рассмотрим получившийся прямоугольный треугольник OAB , найдем тангенс угла наклона: $tg \angle AOB = \frac{AB}{OB} = \frac{10}{8} = 1,25$.

Таким образом, значение производной функции в точке $x_0=8$ равно 1,25.

Ответ: 1,25.

4.1.2. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком

Если положение точки при ее движении по числовой прямой задается функцией $S=f(t)$, где t — время движения, то производная функции S — мгновенная скорость движения в момент времени t : $v(t_0)=S'(t_0)$. По аналогии с мгновенной скоростью производная функции в точке x_0 показывает скорость изменения функции в этой точке.

Пример № 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+15$, где $x(t)$ — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найти ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=9c$.

Решение:

Скорость — значение производной функции в указанной точке. Найдем производную данной функции: $x'(t)=12t-48$. Затем найдем значение производной в указанной точке:

$$x'(9)=12 \cdot 9-48=108-48=60.$$

Следовательно, скорость материальной точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+15$ в момент времени $t=9c$, равна 60 м/с.

Ответ: 60.

Пример № 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$, $x(t)$ — расстояние от точки

отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Решение:

Эта задача является обратной к предыдущей. Итак, найдем производную данной функции: $x'(t) = t^2 - 6t - 5$. В условии задачи сказано, что скорость точки равна 2 м/с, то есть $x'(t_0) = 2$. Получим уравнение:

$$t^2 - 6t - 5 = 2,$$

$$t^2 - 6t - 7 = 0.$$

Решая уравнение, получаем два корня: $t_1 = -1$, $t_2 = 7$.

Но помним о том, что время не может быть отрицательным, значит, $t_1 = -1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 7.

4.1.3. Уравнение касательной к графику функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$, которая в некоторой точке x_0 имеет конечную производную. Тогда прямая, проходящая через точку с координатами $(x_0; f(x_0))$, имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$, называется касательной.

Если производная функции в точке x_0 не существует, то возможны два варианта:

1. Касательная к графику тоже не существует.
2. Касательная становится вертикальной.

Всякая неvertикальная прямая задается уравнением вида $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент. Чтобы составить уравнение касательной в некоторой точке x_0 , необходимо знать значение функции и производной в этой точке.

Пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную на отрезке $[a; b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, где $f'(x_0)$ — значение производной в точке x_0 , а $f(x_0)$ — значение самой функции. Итак, уравнение касательной имеет вид: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Пример № 1. Дана функция $y=x^4$. Составить уравнение касательной к графику этой функции в точке $x_0=2$.

Решение:

Найдем значение функции в точке $x_0=2$: $f(2)=2^4=16$.

Теперь найдем производную: $f'(x)=4x^3$.

Подставим в производную $x_0=2$: $f'(2)=4 \cdot 2^3=32$.

Подставим найденные значения в уравнение касательной:

$$y=f'(x_0) \cdot (x-x_0)+f(x_0)=32(x-2)+16=32x-64+16=32x-48.$$

То есть уравнение касательной имеет вид: $y=32x-48$.

Ответ: $y=32x-48$.

Пример № 2. Составить уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=3\sin x+6 \text{ в точке } x_0=\frac{\pi}{2}.$$

Решение:

Значение функции в точке

$$x_0=\frac{\pi}{2}: f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\frac{\pi}{2}+6=3+6=9.$$

Найдем производную: $f'(x)=(3\sin x+6)'=3\cos x$.

$$\text{Значение производной в точке } x_0=\frac{\pi}{2}: f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Подставим найденные значения в уравнение

$$\text{касательной: } y=0 \cdot \left(x-\frac{\pi}{2}\right)+9=9.$$

Ответ: $y=9$.

В этой задаче касательная к графику функции является горизонтальной прямой, так как угловой коэффициент $k=0$.

Точка $x_0=\frac{\pi}{2}$ является экстремумом функции.

4.1.4. Производные суммы, разности, произведения, частного

Производная суммы двух дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций: $(u+v)'=u'+v'$.

Производная разности двух дифференцируемых функций равна разности производных этих функций: $(u - v)' = u' - v'$.

Производная произведения двух дифференцируемых функций имеет вид: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Производная произведения двух функций НЕ равна произведению производных этих функций!

Производная частного двух дифференцируемых функций вычисляется по формуле: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

4.1.5. Производные основных элементарных функций

1. $C' = 0$, $C = \text{const}$.

Производная степенной функции:

2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Производная показательной функции:

4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

Производная экспоненциальной функции:

5. $(e^x)' = e^x$.

Производная логарифмической функции:

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Производная тригонометрической функции:

8. $(\sin x)' = \cos x$.

9. $(\cos x)' = -\sin x$.

10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Производная обратной тригонометрической функции:

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

4.1.6. Вторая производная и ее физический смысл

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производную называют второй производной от $f(x)$ и обозначают $f''(x)$:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

В соответствии с физическим смыслом производной (смотри пункт 4.1.2.), вторая производная — скорость изменения первой производной, т.е., согласно физическим терминам, *ускорение* изменения исходной функции.

Геометрический смысл второй производной связан с понятиями выпуклости и кривизны графика функции.

4.2. Исследование функций

4.2.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

1. Построение графика функции лучше начинать с ее исследования. Для данной функции:

- 1) находят ее область определения и множество значений;
- 2) выясняют, является ли функция f четной или нечетной, является ли периодической;
- 3) находят точки пересечения графика с осями координат;
- 4) определяют промежутки знакопостоянства функции, а также промежутки возрастания и убывания;
- 5) находят точки экстремума и значения функции в этих точках;

- 6) исследуют поведение функции в окрестности «особых» точек и при больших по модулю x ;
- 7) при необходимости составляют таблицу дополнительных точек для построения графика.

На основании проведенного исследования строится график функции.

Исследование функции на возрастание (убывание) и на экстремум удобно проводить с помощью производной. Для этого сначала находят производную функции f и ее критические точки, а затем выясняют, какие из них являются точками экстремума.

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной: если в некотором промежутке $f'(x)>0$, то функция возрастает в этом промежутке; если же $f'(x)<0$, то функция убывает в этом промежутке.

Точка x_0 из области определения функции $y=f(x)$ называется *точкой минимума* этой функции, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Точка x_0 из области определения функции $y=f(x)$ называется *точкой максимума* этой функции, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точки минимума и максимума функции называются *экстремальными точками* данной функции, а значения функции в этих точках — *минимумом* и *максимумом* функции.

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками этой функции. Только в этих точках функция может иметь экстремум.

Необходимое условие экстремума: если x_0 — точка экстремума функции $y=f(x)$ и производная существует в этой точке, то $f'(x)=0$.

Достаточные условия экстремума: если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум: минимум в том случае, когда производная меняет знак с минуса на плюс, и максимум — когда с плюса на минус. Если же при переходе через критическую точку x_0 производная не меняет знака, то функция $y=f(x)$ в точке не имеет экстремума.

Правило нахождения экстремумов функции с помощью производной

1. Найти производную функции $f'(x)$.
2. Найти критические точки функции $y=f(x)$, для этого приравнять найденную производную к нулю.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y=f(x)$.

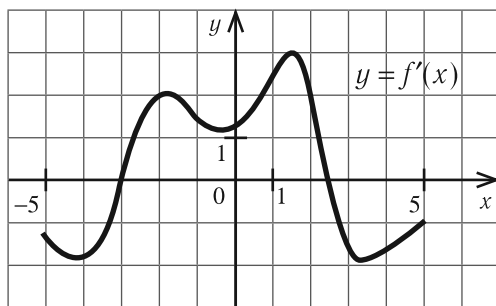
Иногда вместо графика функции в задаче В8 дается график производной и требуется найти точку максимума или минимума функции.

Для того чтобы найти точки максимума и минимума по графику производной, достаточно выполнить следующие шаги:

1. Спроецировать график производной на ось Ox , отметив на ней только нули производной.
2. Выяснить знаки производной на каждом полученном числовом промежутке. Знак производной легко определить по данному рисунку:
 - если график производной лежит выше оси Ox , значит, $f'(x) > 0$,
 - если график производной проходит ниже оси Ox , то $f'(x) < 0$.
3. Определить точки максимума и минимума. Там, где знак производной меняется с минуса на плюс, находится точка минимума. И наоборот, если знак производной меняется с плюса на минус, это точка максимума.

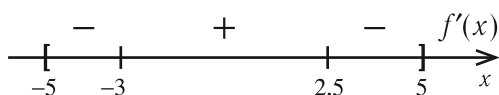
Рассматриваем числовые промежутки всегда слева направо.

Пример № 1. На рисунке изображен график производной функции, определенной на отрезке $[-5; 5]$. Найти точку максимума функции $f(x)$ на этом отрезке.



Решение:

Построим прямую x , отметив на ней границы данного промежутка и нули производной (абсциссы точек пересечения графика производной с осью Ox : $x = -3$, $x = 2,5$). Определим знаки производной на числовых промежутках.



В точке $x = 2,5$ производная меняет свой знак с плюса на минус, значит, эта точка является точкой максимума.

Ответ: 2,5.

Нахождение интервалов возрастания и убывания функции

Задача состоит в том, чтобы по производной отыскивать области, в которых сама функция возрастает или убывает. Определение возрастающей и убывающей функции можно посмотреть в пункте 3.2.1.

Сформулируем достаточные условия возрастания и убывания:

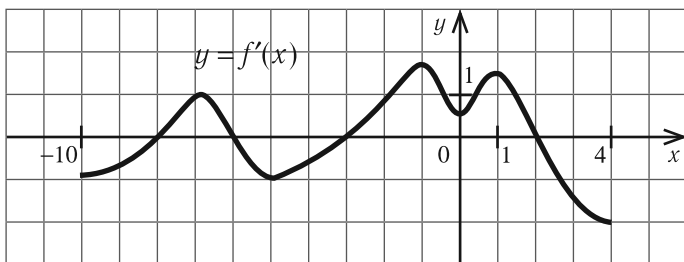
1. Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ возрастала на отрезке $[a; b]$, достаточно, чтобы ее производная внутри отрезка была положительна, то есть $f'(x) > 0$.
2. Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ убывала на отрезке $[a; b]$, достаточно, чтобы ее производная внутри отрезка была отрицательна, то есть $f'(x) < 0$.

Для того чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции, можно воспользоваться алгоритмом нахождения точек экстремума. Там, где $f'(x) > 0$, функция возрастает, а где $f'(x) < 0$ — убывает. Можно также определить промежутки монотонности по графику производной:

- промежутки, на которых график производной лежит выше оси Ox , являются промежутками возрастания функции,
- промежутки, на которых график производной лежит ниже оси Ox , являются промежутками убывания функции.

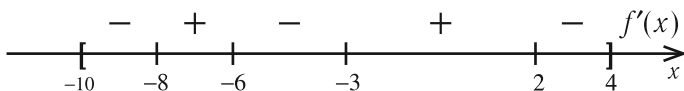
Пример № 2

На рисунке изображен график производной некоторой функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-10; 4]$. Найти длину наибольшего промежутка убывания функции.



Решение:

Построим прямую x , отметив на ней границы данного промежутка и нули производной (абсциссы точек пересечения графика производной с осью Ox : $x = -8$, $x = -6$, $x = -3$, $x = 2$). Определим знаки производной на числовых промежутках.



Нас интересуют промежутки убывания функции, то есть такие, где $f'(x) < 0$. На рисунке таких промежутков три: $[-10; -8)$, $(-6; -3)$, $(2; 4]$. Длина наибольшего из них равна 3: $-3 - (-6) = 3$.

Ответ: 3.

В задании В11 Единого государственного экзамена предлагается исследовать на экстремумы функцию, заданную формулой.

Напомним, что значения переменных, при которых функция принимает наибольшее или наименьшее значение, — это точки экстремума (максимум или минимум), а экстремумы — это значения самих функций, максимальные или минимальные в некоторой своей окрестности.

Рассмотрим два алгоритма решения задания В 11.

Алгоритм 1. В задании требуется найти точку максимума или минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

1. Найти производную функции $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f'(x)=0$. Полученные корни обозначить x_1, x_2, \dots, x_n .

3. Отметить найденные корни на координатной прямой. Если задан отрезок $[a; b]$, отметить его и отбросить все, что лежит за его пределами. Если отрезок не задан, функция рассматривается на своей области определения. Расставить знаки, которые принимает производная на получившихся числовых промежутках. Знаки всегда расставляются слева направо, то есть по направлению числовой оси. Необходимо очень внимательно отнестись к расстановке знаков производной; при переходе через корень четной кратности (вторая, четвертая и так далее) знак у производной не меняется.

4. Среди оставшихся точек ищем такую, в которой производная меняет свой знак с минуса на плюс (это точка минимума) или с плюса на минус (точка максимума). Такая точка должна быть только одна!

Пример. Найти точку максимума функции

$$y = \frac{x^2 - 8x + 25}{x^2} \text{ на отрезке } [-10; -1].$$

Решение:^x

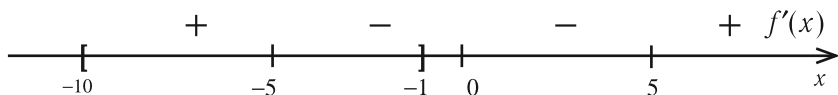
Найдем производную данной функции:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 - 8x + 25}{x^2} \right)' = \frac{(x^2 - 8x + 25)' \cdot x - (x^2 - 8x + 25) \cdot x'}{x^2} = \\ &= \frac{x^2 - 25}{x^2} \end{aligned}$$

Решим дробно-рациональное уравнение $f'(x)=0$.

$$\frac{x^2 - 25}{x^2} = 0.$$

Приравняв к нулю числитель, получим следующие корни: $x_1 = -5$, $x_2 = 5$. Приравняв к нулю знаменатель, получим $x = 0$ (корень второй кратности). На координатной прямой отмечаем полученные корни, расставляем знаки производной, а также не забываем про границы отрезка:



В пределах заданного отрезка находится только одна точка $x = -5$, в которой производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, это точка максимума.

Ответ: -5 .

Алгоритм 2. В задании требуется найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

1. Найти производную функции $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$. Если корней нет, переходим сразу к пункту 4, пропустив третий.
3. Из полученных корней вычеркнуть все, которые не принадлежат отрезку $[a; b]$ или совпадают с его концами. Оставшиеся числа обозначим x_1, x_2, \dots, x_n .
4. Подставим концы отрезка $[a; b]$ и точки x_1, x_2, \dots, x_n в данную функцию. Получим значения функции: $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, из которых выбираем наибольшее (наименьшее) значение.

Пример. Найти наименьшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 12$ на отрезке $[-5; 1]$.

Решение:

Найдем производную функции $y' = 3x^2 + 12x + 9$.

Решим уравнение $f'(x) = 0$:

$$3x^2 + 12x + 9 = 0,$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0,$$

$$x_1 = -3, x_2 = -1.$$

Оба корня принадлежат данному отрезку. Вычислим значение данной функции в полученных точках и на концах отрезка.

$$y(-5) = (-5)^3 + 6(-5)^2 + 9(-5) - 12 = -32;$$

$$y(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) - 12 = -12;$$

$$y(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) - 12 = -16;$$

$$y(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 12 = 4.$$

Наименьшее значение функции достигается в точке

$$x = -5, y_{\text{наим}} = -32.$$

Ответ: -32 .

4.2.2. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах

Одним из важных приложений производной является использование ее при решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений. Такие задачи возникают там, где необходимо выяснить, как с помощью имеющихся средств достичь наилучшего результата, как получить наилучший результат с наименьшей затратой средств, материалов, времени, труда и так далее.

Пример № 1. Найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Решение:

На первом этапе составляем математическую модель данной задачи. Помним о том, что известна форма банки и то, что банка должна быть заданной емкости. Также известно, что расход жести на изготовление банки должен быть минимальным, а это означает, что площадь полной поверхности цилиндрической банки должна быть наименьшей.

Обозначим емкость банки через V см³ и переформулируем задачу: определить размеры цилиндра с объемом V см³ так, чтобы площадь его полной поверхности была наименьшей.

Введем обозначения:

x см — радиус основания, h см — высота.

Объем цилиндра вычисляется по формуле: $V = \pi r^2 h = \pi x^2 h$.

Выразим высоту: $h = \frac{V}{\pi x^2}$.

Формула для вычисления площади полной поверхности цилиндра имеет вид:

$$\begin{aligned} S &= 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = \\ &= 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}. \end{aligned}$$

Итак, математическая модель задачи — это функция

$$S(x) = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

Таким образом, нам необходимо найти наименьшее значение функции $S(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$, поскольку $x > 0$.

Найдем производную полученной функции:

$$S'(x) = \left(\frac{2\pi x^3 + 2V}{x} \right)' = \frac{6\pi x^3 - (2\pi x^3 + 2V)}{x^2} = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

Решим уравнение $f'(x) = 0$: $\frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2} = 0$.

Единственный корень $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Определим знак производной:

при $0 < x < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ $S'(x) < 0$, а при $x > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ $S'(x) > 0$.

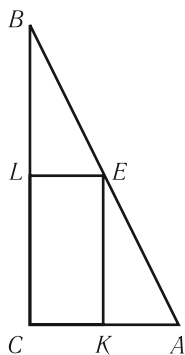
Так как производная меняет свой знак с минуса на плюс, то в точке $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ функция $S(x)$ имеет минимум, то есть в этой точке функция достигает наименьшего значения.

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра, имеющего объем V , будет наименьшей при $h = 2x = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, т.е. когда диаметр основания и высота цилиндра будут равны между собой.

Таким образом, ответ на вопрос задачи: наименьший расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости — будет достигнут при условии, что диаметр основания и высота банки будут равны между собой.

Пример № 2. Из куска железа в форме прямоугольного треугольника с катетами 2 м и 4 м необходимо вырезать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными катетам треугольника.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$ м, $BC = 4$ м.



Решение:

$\triangle ABC \sim \triangle EBL$ (по двум углам). В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны, то есть: $\frac{AC}{EL} = \frac{BC}{BL}$.

Пусть $EL = x$ м, тогда $\frac{2}{x} = \frac{4}{4 - LC}$,

$LC = 4 - 2x$.

Площадь прямоугольника вычисляется по формуле

$$S = EL \cdot LC = x \cdot (4 - 2x) = 4x - 2x^2,$$

то есть мы составили математическую модель для данной задачи.

Найдем производную составленной функции: $S' = 4 - 4x$.

Приравняем производную к нулю и решим уравнение:

$$S' = 0, 4 - 4x = 0, x = 1.$$

При $0 < x < 1$ $S' > 0$,

при $x > 1$ $S' < 0$.

Таким образом $x = 1$ — точка максимума.

То есть при $x = 1$ площадь прямоугольника является наибольшей: $S = 2 \cdot 1 = 2$ (м²).

Соответствующие стороны прямоугольника: 1 м, 2 м.

4.3. Первообразная и интеграл

4.3.1. Первообразные элементарных функций

Зная закон движения тела, можно, продифференцировав функцию перемещения тела по времени, в любой момент найти его скорость (см. 4.1.2.). Часто требуется решить обратную задачу, то есть найти перемещение тела, зная, как изменяется его скорость. Такие задачи решаются при помощи **интегрирования** — операции, обратной дифференцированию.

Интегрирование позволяет по производной функции найти саму функцию.

Функция $y=F(x)$, заданная на некотором промежутке X , называется **первообразной** функции $y=f(x)$, заданной на том же промежутке, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'=f(x)$. Например, функция $F(x)=\frac{x^4}{4}$ является первообразной функции $f(x)=x^3$.

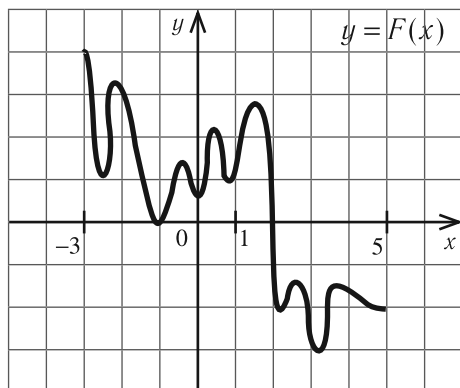
Если функция $y=F(x)$ является первообразной функции $y=f(x)$, то все функции вида $y=F(x)+C$, где C — константа, и только они являются первообразными функции $y=f(x)$.

Множество всех первообразных называют **неопределенным интегралом** от функции $y=f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Таблица первообразных для некоторых элементарных функций

| Функция | Первообразная |
|----------------------|---------------------------|
| a | $ax+C$ |
| $x^p, p \neq -1$ | $\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$ |
| $\frac{1}{x}, x > 0$ | $\ln x+C$ |
| $\frac{1}{x}, x < 0$ | $\ln(-x)+C$ |
| e^x | e^x+C |
| a^x | $\frac{a^x}{\ln a}+C$ |
| $\sin x$ | $-\cos x+C$ |
| $\cos x$ | $\sin x+C$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x+C$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x+C$ |

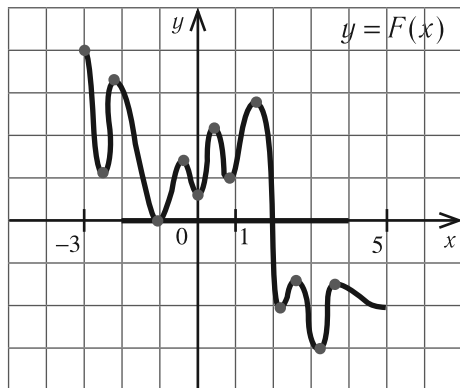
Пример № 1. На рисунке изображен график функции $y=F(x)$, одной из первообразных некоторой функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-3; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-2; 4]$.



Решение:

Так как $y=F(x)$ — первообразная функции $y=f(x)$, то $F'(x)=f(x)$. Исходную задачу можно переформулировать так: по графику функции найти количество точек, принадлежащих отрезку $[-2; 4]$, в которых производная функции равна нулю, то есть найти количество экстремумов функции.

Отметим на рисунке сам отрезок и точки экстремума функции:



На отрезке $[-2; 4]$ точек экстремума 10.

Ответ: 10.

4.3.2. Примеры применения интеграла в физике и геометрии

Определенный интеграл используют для исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах.

Геометрический смысл интеграла — площадь криволинейной трапеции. Физический смысл интеграла — масса неоднородного стержня переменной плотности; перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью за промежутки времени.

1. Применение интеграла в физике

- Работа A переменной силы.
- S — (путь) перемещения.
- Вычисление массы.
- Вычисление момента инерции линии, круга, цилиндра.
- Вычисление координаты центра тяжести.
- Количество теплоты и т. д.

Пример. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе — со скоростью $v = (4t + 5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение:

Искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^5 (6t^2 + 2t) dt - \int_0^5 (4t + 5) dt = (2t^3 + t^2) \Big|_0^5 - (2t^2 + 5t) \Big|_0^5 = (250 + 25) - (50 + 25) = 275 - 75 = 200 \text{ (м)}$$

Ответ: 200 метров.

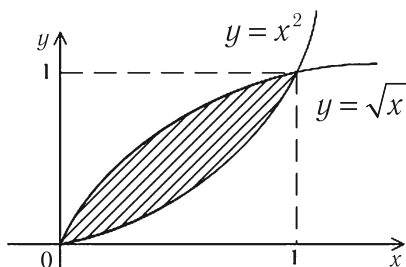
2. Применение интеграла в геометрии

- Вычисления S фигур.
- Длина дуги кривой.
- V тела на S параллельных сечений.
- V тела вращения и т. д.

Пример № 1. Найдем площадь некоторой области, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение:

Найдем общие точки графиков, для этого решим уравнение $x^2 = \sqrt{x}$. Корни этого уравнения: $x_1 = 0, x_2 = 1$. Таким образом, графики функций имеют две общие точки $(0; 0), (1; 1)$. На отрезке $[0; 1]$ график функции $y = \sqrt{x}$ расположен выше графика функции $y = x^2$.



Значит, площадь заштрихованной области можно найти по формуле:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \\ &= \left(\frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} 1^3 \right) - \left(\frac{2}{3} 0^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} 0^3 \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

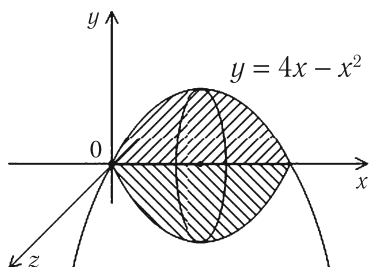
Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример № 2

Найти объем V тела, ограниченного поверхностью вращения линии $y = 4x - x^2$ вокруг оси Ox (при $0 \leq x \leq 4$).

Решение:

Объем V тела вращения вычисляется по формуле



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{16x^3}{3} - \frac{8x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^4 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left(\frac{16 \cdot 4^3}{3} - \frac{8 \cdot 4^4}{4} + \frac{4^5}{5} \right) - \pi \left(\frac{16 \cdot 0^3}{3} - \frac{8 \cdot 0^4}{4} + \frac{0^5}{5} \right) = \\
&= \pi \left(\frac{16 \cdot 64}{3} - \frac{8 \cdot 256}{4} + \frac{1024}{5} \right) = \pi \left(\frac{1024}{3} - \frac{1024}{2} + \frac{1024}{5} \right) = \\
&= 1024\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = 1024\pi \cdot \frac{1}{30} = \frac{512\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{512\pi}{2}$.

5. ГЕОМЕТРИЯ

5.1. Планиметрия

5.1.1. Треугольник

Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки попарно. Точки называются вершинами, а отрезки — сторонами треугольника. Стороны треугольника обозначаются часто малыми буквами, которые соответствуют заглавным буквам, обозначающим противоположные вершины.

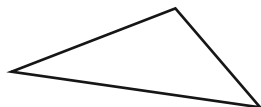
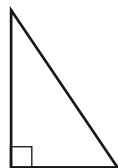
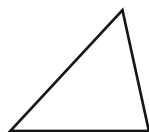
Классификация треугольников

По углам:

Остроугольный треугольник — треугольник, у которого все углы острые.

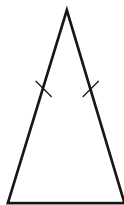
Прямоугольный треугольник — треугольник, у которого один из углов прямой. Стороны, образующие прямой угол, называются *катетами*; сторона, противоположная прямому углу, называется *гипотенузой*.

Тупоугольный треугольник — треугольник, у которого один из углов тупой.

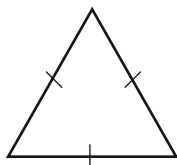


По сторонам:

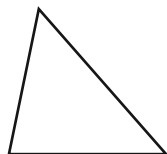
Равнобедренный треугольник — треугольник, у которого две его стороны равны; эти равные стороны называются *боковыми*, третья сторона называется *основанием* треугольника.



Равносторонний треугольник — треугольник, у которого все стороны равны. Такой треугольник называется *правильным*.



Разносторонний треугольник — треугольник, у которого все стороны разной длины.



В любом треугольнике:

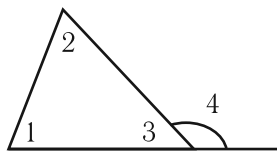
1. Против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

Следствие 1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Следствие 2. Если два угла равны, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника).

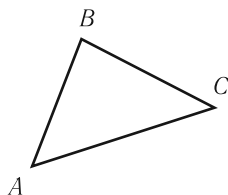
2. Против равных сторон лежат равные углы, и наоборот.
3. Сумма углов треугольника равна 180° .

4. Внешний угол треугольника — угол, смежный с одним из углов треугольника. Угол 4 — внешний угол, смежный с углом 3 данного треугольника.



Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, несмежных с ним: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

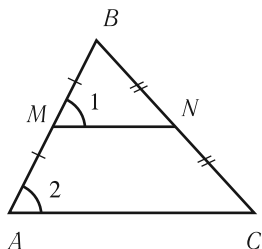
5. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон
 $AC < AB + BC$,
 $AB < AC + BC$,
 $BC < AB + AC$.



Основные линии треугольника

Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

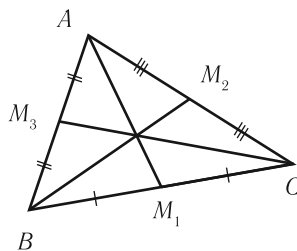
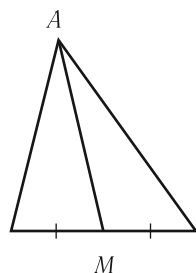
Свойство средней линии треугольника: средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны этого треугольника.

Свойства медиан треугольника:

1. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.
2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.
3. Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников (т.е. имеющих одинаковые площади).

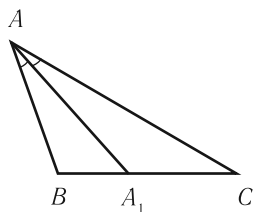


Пусть стороны треугольника a , b и c , тогда медиана, проведенная к стороне b , обозначается m_b .

Через стороны треугольника медиана выражается так:

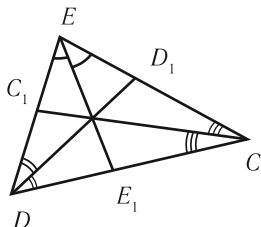
$$m_b = \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

Биссектриса треугольника — это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне этого треугольника.

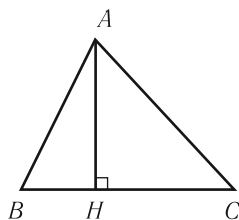


Свойства биссектрис треугольника:

1. Биссектриса угла — это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.
2. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.
3. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

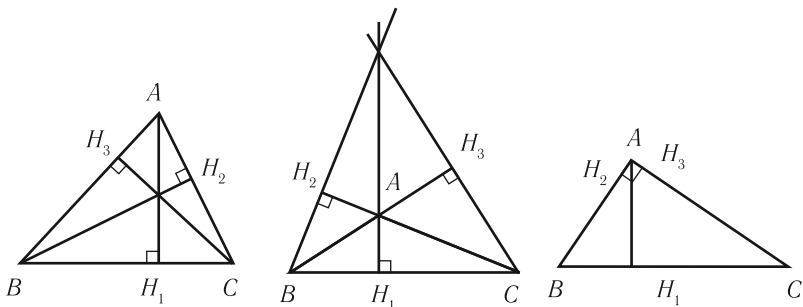


Высота треугольника — это перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.



Свойство высот треугольника:

Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.



Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, которые называются проекциями катетов на гипотенузу.

Свойства высоты в прямоугольном треугольнике:

1. Высота, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.
2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.
3. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.

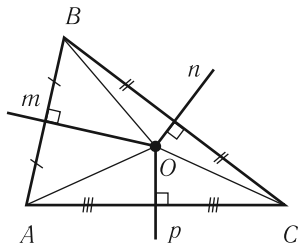
Пусть стороны треугольника a , b и c , тогда высота, проведенная к стороне b , обозначается h_b . Через стороны треугольника высота выражается так:

$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Прямую, проходящую через середину отрезка и перпендикулярно к нему, называют **серединным перпендикуляром** к отрезку.

Свойства серединных перпендикуляров треугольника:

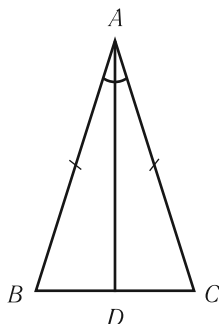
1. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.
2. Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.



Если высота, медиана и биссектриса проведены из одной вершины треугольника, то биссектриса расположена между медианой и высотой.

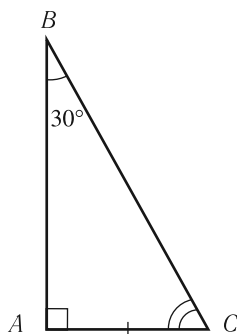
Свойства равнобедренного треугольника:

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.
3. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.
4. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является биссектрисой и медианой.



Свойства прямоугольного треугольника:

1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° .
2. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.
3. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° .

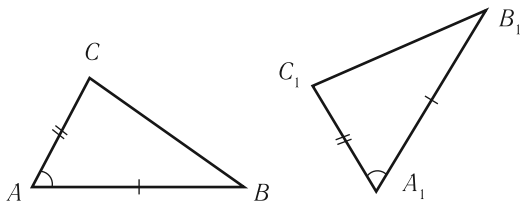


Равенство треугольников

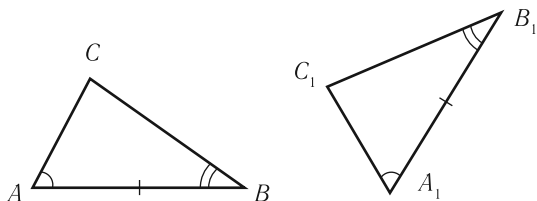
Два треугольника называются равными, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны. Равные треугольники совпадают при наложении.

Признаки равенства треугольников:

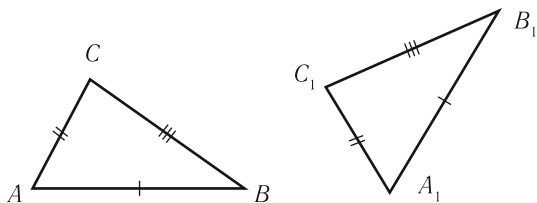
1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



2. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



3. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



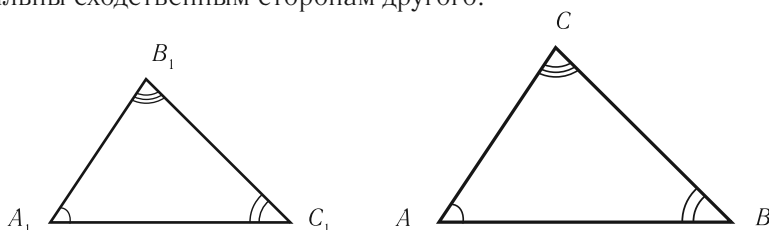
Признаки равенства прямоугольных треугольников:

1. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.
2. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

3. Если катет и противолежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
4. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
5. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Подобие треугольников

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так:

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k.$$

Число k , равное отношению сходственных сторон треугольника, называется **коэффициентом подобия**.

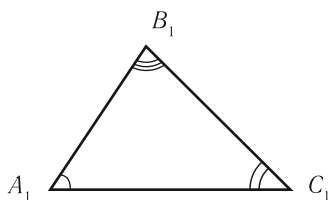
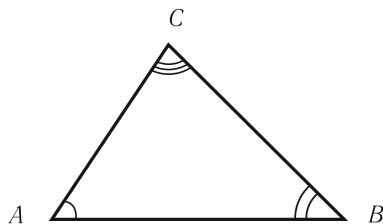
Признаки подобия треугольников:

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
2. Если угол одного треугольника равен углу другого, а стороны, образующие этот угол в одном треугольнике, про-

порциональны сходственным сторонам другого, то такие треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Теоремы о периметрах и площадях подобных треугольников

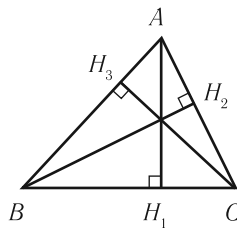


Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = k$.

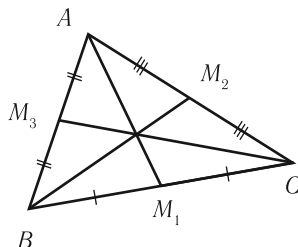
Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2$.

Замечательные точки в треугольнике

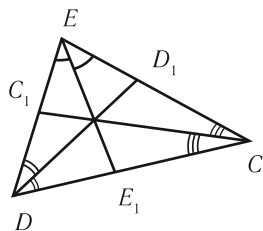
Высоты треугольника пересекаются в одной точке.



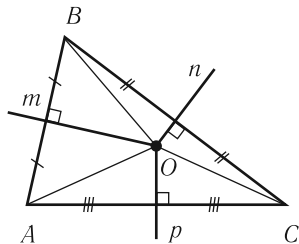
Медианы треугольника (AD, BE, CF) пересекаются в одной точке. Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



Биссектрисы треугольника (AD, BE, CF) пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности.



Срединные перпендикуляры треугольника ABC пересекаются в одной точке O , являющейся центром описанной окружности.



В остроугольном треугольнике эта точка лежит внутри треугольника; в тупоугольном — снаружи; в прямоугольном — в середине гипотенузы.

Точки пересечения высот, медиан, биссектрис и срединных перпендикуляров совпадают только в равностороннем треугольнике.

Теорема Пифагора

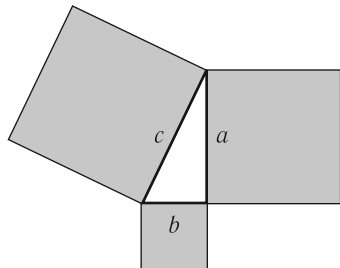
Алгебраическая формулировка. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Обратная теорема: для всякой тройки положительных чисел a , b и c , такой, что $a^2 + b^2 = c^2$, существует прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c .

Геометрическая формулировка. В прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Соотношение между сторонами и углами треугольника

I. Произвольный треугольник

Теорема косинусов

(обобщенная теорема Пифагора)

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Таким образом, для произвольного треугольника имеем:

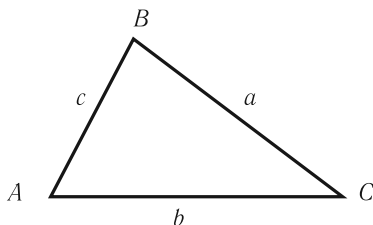
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

где C — угол между сторонами a и b .

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}.$$



Обобщенная теорема синусов

Во всяком треугольнике отношение длины стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно двум радиусам окружности, описанной около этого треугольника:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R.$$

II. Прямоугольный треугольник

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

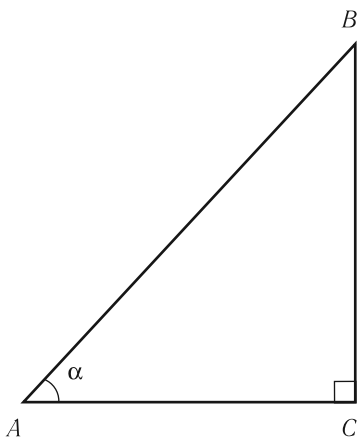
$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$



Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° , 45° и 60°

| α | 30° | 45° | 60° |
|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

Формулы для вычисления площади треугольника

I. Произвольный треугольник

Введем некоторые обозначения:

a, b, c — стороны треугольника;

S — площадь треугольника;

α — угол между сторонами a и b ;

p — полупериметр треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$;

R — радиус окружности, описанной около треугольника;

r — радиус окружности, вписанной в треугольник;

h_a — высота, проведенная к стороне a .

Существуют несколько формул для вычисления площади произвольного треугольника:

1. Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

2. Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha.$$

3. Формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

4. Площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной в треугольник окружности:

$$S = pr.$$

5. Площадь треугольника равна отношению произведения сторон треугольника на 4 радиуса описанной около треугольника окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

II. Прямоугольный треугольник

Введем обозначения:

a, b — катеты;

c — гипотенуза;

h_c — высота, проведенная к гипотенузе.

1. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

2. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведенную к гипотенузе:

$$S = \frac{1}{2}ch_c.$$

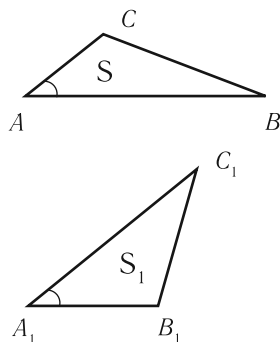
III. Равносторонний треугольник: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Теоремы о площадях треугольников

1. Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

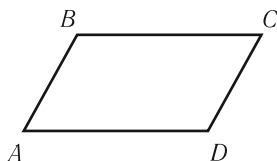
2. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$



5.1.2. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



Свойства параллелограмма:

1. Противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
2. Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° :

$$\angle A + \angle B = 180^\circ.$$

4. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.
5. Биссектрисы противоположных углов параллельны; биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне, перпендикулярны.

Признаки параллелограмма

Четырехугольник является параллелограммом, если:

1. Две его противоположные стороны равны и параллельны.
2. Противоположные стороны попарно равны.
3. Противоположные углы попарно равны.
4. Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Формулы для вычисления площади параллелограмма

Введем обозначения:

S — площадь параллелограмма;

a и b — смежные стороны;

α — угол между ними;

d_1 и d_2 — диагонали параллелограмма;

φ — угол между диагоналями;

h_a — высота, проведенная к стороне a .

Существуют несколько формул для вычисления площади параллелограмма:

1. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$$S = ah_a.$$

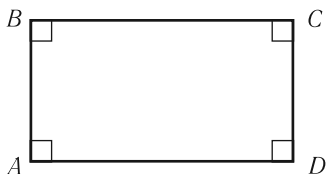
2. Площадь параллелограмма равна произведению смежных сторон на синус угла между ними:

$$S = ab \cdot \sin \alpha.$$

3. Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей параллелограмма на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.



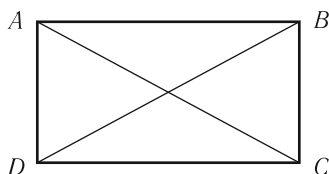
Свойства прямоугольника

Так как прямоугольник является параллелограммом, то обладает всеми свойствами параллелограмма.

*Особое свойство
прямоугольника*

Диагонали прямоугольника равны:

$$AC=BD.$$



Признак прямоугольника

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Вокруг прямоугольника всегда можно описать окружность.

Формулы для вычисления площади прямоугольника

Введем обозначения:

S — площадь прямоугольника;

a и b — смежные стороны;

d — диагональ прямоугольника;

φ — угол между диагоналями.

Площадь прямоугольника можно вычислить по формулам:

1. Площадь прямоугольника равна произведению смежных сторон:

$$S=ab.$$

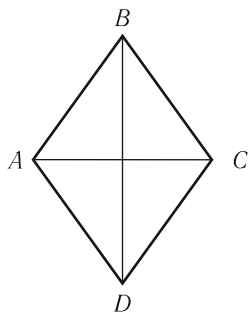
2. Площадь прямоугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi.$$

Ромб называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства ромба

Так как ромб является параллелограммом, то обладает всеми свойствами параллелограмма.



Особое свойство ромба

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Признаки ромба

1. Если в параллелограмме смежные стороны равны, то этот параллелограмм — ромб.
2. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
3. Если одна из диагоналей параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

Формулы для вычисления площади ромба

Введем обозначения:

S — площадь ромба;

a — сторона ромба;

α — угол;

d_1 и d_2 — диагонали ромба;

φ — угол между диагоналями;

h_a — высота, проведенная к стороне a .

Площадь ромба можно вычислить по формулам:

1. Площадь ромба равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$$S = ah_a.$$

2. Площадь ромба равна произведению смежных сторон на синус угла между ними:

$$S = a^2 \cdot \sin \alpha.$$

3. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны. **Квадратом** называется ромб, у которого все углы прямые.

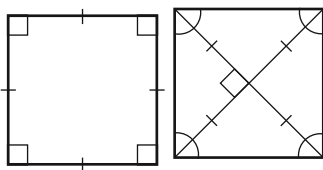
Получается, что квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба.

Перечислим *свойства квадрата*:

1. Все углы квадрата — прямые, все стороны квадрата — равны.
2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам.
3. Диагонали квадрата являются биссектрисами его углов.

Признаки квадрата

Прямоугольник является квадратом, если он обладает каким-нибудь признаком ромба.



Формулы для вычисления площади квадрата

Введем обозначения:

S — площадь квадрата;

a — сторона квадрата;

d — диагональ квадрата.

Площадь квадрата можно вычислить по формулам:

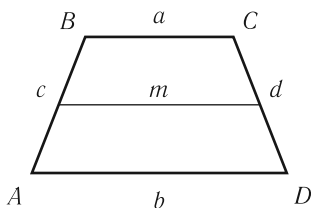
1. Площадь квадрата равна квадрату его стороны:
$$S = a^2.$$
2. Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2}d^2.$$

5.1.3. Трапеция

Трапеция — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет.

Параллельные стороны трапеции называются *основаниями*, две другие — *боковыми сторонами*.



Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, называется *средней линией* трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина ее равна полусумме оснований:

$$m = \frac{1}{2}(a + b).$$

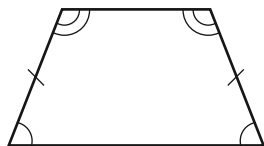
Высота трапеции — расстояние между прямыми, на которых лежат основания трапеции.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

Равнобедренная трапеция — трапеция, у которой боковые стороны равны. В равнобедренной трапеции:

- 1) диагонали равны;
- 2) углы при каждом основании равны.

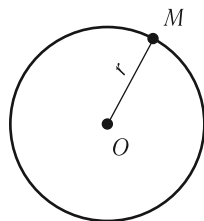


Прямоугольная трапеция — трапеция, у которой один из углов при основании прямой.



5.1.4. Окружность и круг

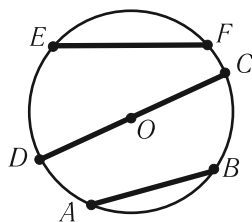
Окружность — геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Данная точка (O) называется **центром окружности**.



Окружность разделяет плоскость на две части, внутреннюю и внешнюю. Внутренняя часть, включающая саму окружность, называется **кругом**.

Радиус окружности — это отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности. Обозначение — R . Из определения следует, что все радиусы одной окружности равны между собой.

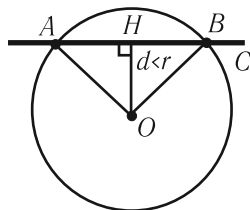
Хорда — отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*. Центр окружности является серединой любого диаметра.



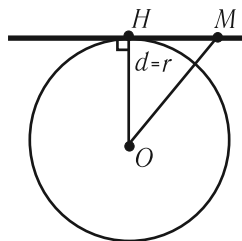
Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой окружности*. Дуга называется *полуокружностью*, если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром. Сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360° .

Взаимное расположение прямой и окружности

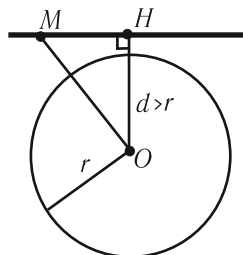
1-й случай. Если расстояние от центра окружности до прямой **меньше** радиуса окружности ($d < r$), то прямая и окружность имеют **две** общие точки. В этом случае прямая называется **секущей** по отношению к окружности.



2-й случай. Если расстояние от центра окружности до прямой **равно** радиусу окружности ($d = r$), то прямая и окружность имеют **только одну** общую точку. В этом случае прямая называется **касательной** по отношению к окружности.

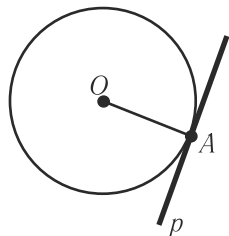


3-й случай. Если расстояние от центра окружности до прямой **больше** радиуса окружности ($d > r$), то прямая и окружность **не имеют общих точек**.



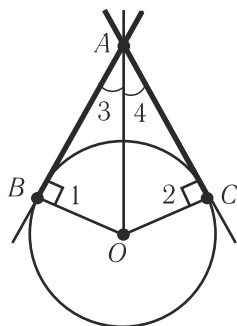
Касательная к окружности

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к окружности. Их общая точка называется *точкой касания* прямой и окружности. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания (свойство касательной к окружности). Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна этому радиусу, то она является касательной (признак касательной к окружности).



Теорема об отрезках касательных

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



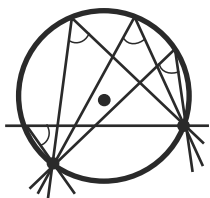
Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Центральные и вписанные углы

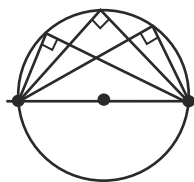
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.



Для вычисления длины окружности используют формулу:

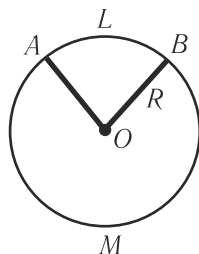
$$C = 2\pi R,$$

где C — длина окружности, R — радиус окружности, π — число, равное отношению длины окружности к ее диаметру. Для любых окружностей это число одно и то же ($\pi \approx 3,14$).

Обозначим площадь круга буквой S , тогда формула для вычисления площади круга:

$$S = \pi R^2.$$

Круговым сектором или просто *сектором* называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Дуга, которая ограничивает сектор, называется *дугой сектора*.



Формула для вычисления площади кругового сектора, ограниченного дугой с градусной мерой α , имеет вид:

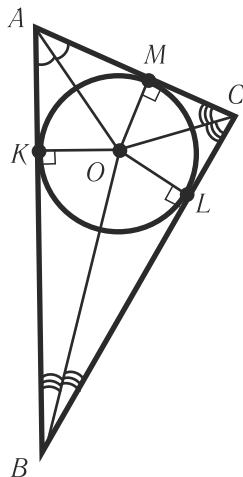
$$S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha.$$

5.1.5. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

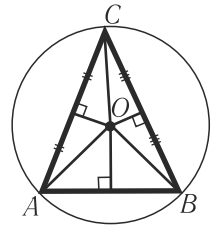
Окружность *вписана* в треугольник, если она касается всех его сторон. Тогда сам треугольник будет *описанным* вокруг окружности. Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис треугольника.

Расстояние от центра вписанной окружности до каждой из сторон треугольника равно радиусу этой окружности.

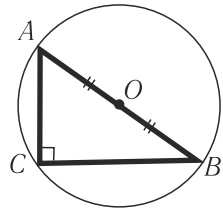
В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну.



Вписанный треугольник — треугольник, все вершины которого лежат на окружности. Тогда окружность называется *описанной* вокруг треугольника.



Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, находится в середине гипотенузы.



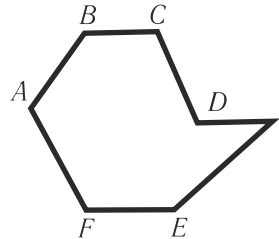
Расстояние от центра описанной окружности до каждой из вершин треугольника одинаково и равно радиусу этой окружности.

Вокруг любого треугольника можно описать окружность, причем только одну.

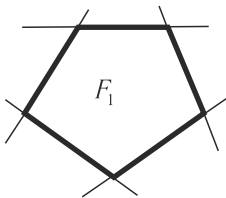
5.1.6. Многоугольник.

Сумма углов выпуклого многоугольника

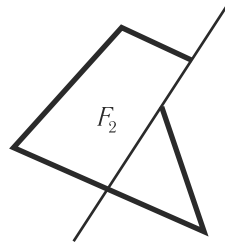
Многоугольник — геометрическая фигура, составленная из отрезков так, что смежные отрезки (AB и BC , BC и BD , ...) не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек.



Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.



Выпуклый многоугольник



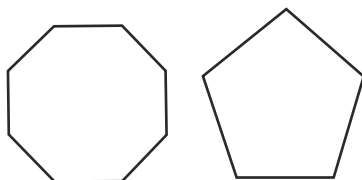
Невыпуклый многоугольник

Сумма углов выпуклого n -угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$.

5.1.7. Правильные многоугольники.

Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника

Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.



Сумма углов правильного n -угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$, причем все его углы равны, поэтому внутренний угол α_n вычисляется по формуле

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ.$$

Окружность называется *описанной* около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности.

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Окружность называется *вписанной* в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Следствие 1. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник. Эта точка называется *центром правильного многоугольника*.

Формулы для вычисления площади правильного n -угольника, его стороны и радиуса вписанной окружности

Введем некоторые обозначения:

S — площадь правильного n -угольника;

a_n — его сторона;

P — периметр;

R — радиус окружности, описанной около правильного n -угольника;

r — радиус окружности, вписанной в правильный n -угольник.

Для любого правильного n -угольника справедливы формулы:

$$S = \frac{1}{2} \cdot P r; \quad a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}; \quad r = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Выражение стороны правильного многоугольника через радиус описанной окружности:

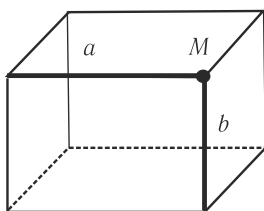
$$a_3 = R\sqrt{3}a_4 = R\sqrt{2}a_6 = R.$$

5.2. Прямые и плоскости в пространстве

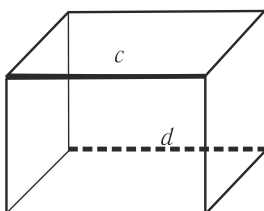
5.2.1. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых

Существуют три случая расположения двух прямых в пространстве. Две прямые в пространстве могут:

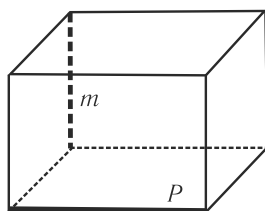
- 1) пересекаться;
- 2) быть параллельными;
- 3) быть скрещивающимися.



пересекаются
 $a \cap b = M$

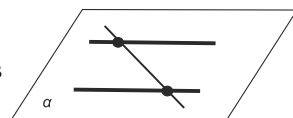


параллельны
 $c \parallel d$

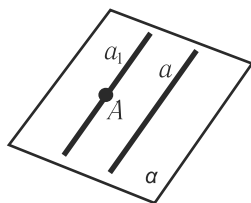


скрещиваются
 $m \nparallel p$

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.



Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.



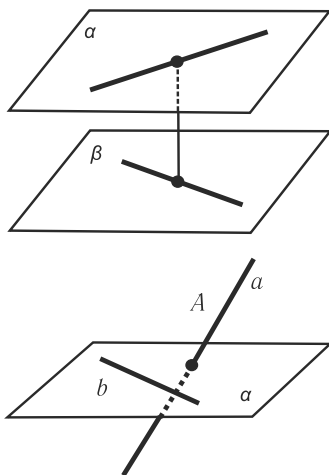
Признак параллельности прямых в пространстве

Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

Признак скрещивающихся прямых

Если одна из скрещивающихся прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.



Две прямые называются **перпендикулярными в пространстве**, если угол между ними равен 90° .

Лемма (о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой)

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

5.2.2. Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства

Существуют три случая расположения прямой и плоскости в пространстве.

Прямая и плоскость:

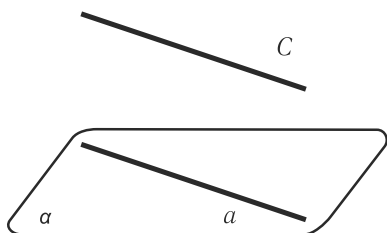
- 1) могут пересекаться;
- 2) могут быть параллельными друг другу;
- 3) прямая может лежать в плоскости.

Прямая параллельна плоскости, если она не имеет с плоскостью общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости

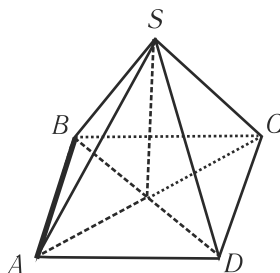
Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ c \parallel a \end{array} \right\} \Rightarrow c \parallel \alpha$$



Этот признак часто используется в решении задач по стереометрии. Например, в правильной четырехугольной пирамиде S_{ABCD} прямая AB параллельна прямой CD — значит, AB параллельна всей плоскости SCD .

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel (SCD)$$



Признаки параллельности прямой и плоскости:

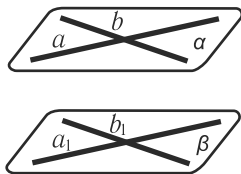
1. Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.
2. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

5.2.3. Параллельность плоскостей, признаки и свойства

Две плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности плоскостей

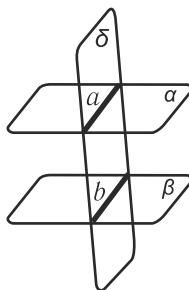
Плоскости параллельны друг другу, если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.



Свойства параллельных плоскостей

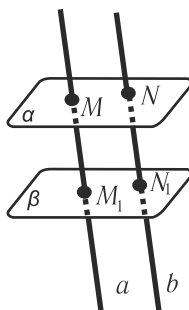
1. Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны друг другу.
2. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны:

$$\left. \begin{array}{l} \delta \cap \alpha = a \\ \delta \cap \beta = b \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b.$$



3. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow MM_1 = NN_1.$$

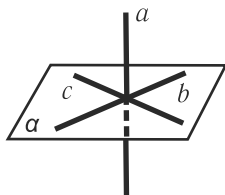


5.2.4. Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трех перпендикулярах

Прямая называется **перпендикулярной** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.



Связь между параллельностью и перпендикулярностью

Свойство 1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна данной плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Свойство 2. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

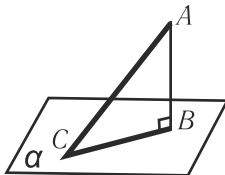
Свойство 3. Если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

Теорема. Через любую точку пространства, не принадлежащую плоскости, проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

Перпендикуляр и наклонная

Пусть даны плоскость α и не лежащая на ней точка A .

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости (отрезок AB).



Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра** (точка B).

Расстоянием от точки до плоскости называется **длина перпендикуляра**, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости (отрезок AC).

Конец отрезка наклонной, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной** (точка C).

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной* (отрезок BC).

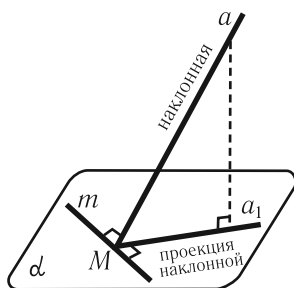
Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и наклонной.

Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и ее проекции.

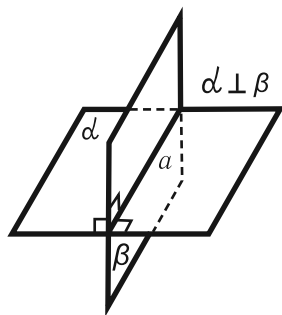
На рисунке показаны все три перпендикуляра: прямая m перпендикулярна одновременно и наклонной, и ее проекции. Если m перпендикулярна наклонной, значит, перпендикулярна и ее проекции, и наоборот.



5.2.5. Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства

Две пересекающиеся **плоскости** называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .

Если плоскости α и β перпендикулярны, то можно также сказать, что плоскость α перпендикулярна к плоскости β или плоскость β перпендикулярна к плоскости α . Поэтому перпендикулярные плоскости α и β часто называют взаимно перпендикулярными.

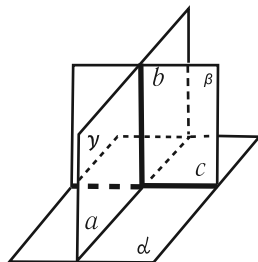


В качестве примера перпендикулярных плоскостей можно привести плоскости стены и пола в комнате.

Признак перпендикулярности плоскостей

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

$$\left. \begin{array}{l} b \subset \beta \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha.$$

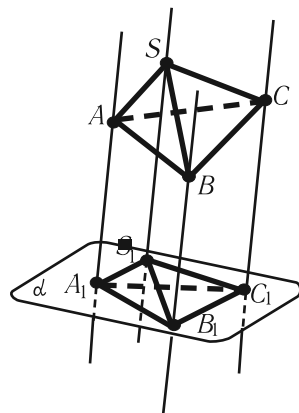


5.2.6. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур

В стереометрии при решении задачи нужно изобразить трехмерное тело на плоском чертеже, причем так, чтобы на чертеже получилось объемное тело.

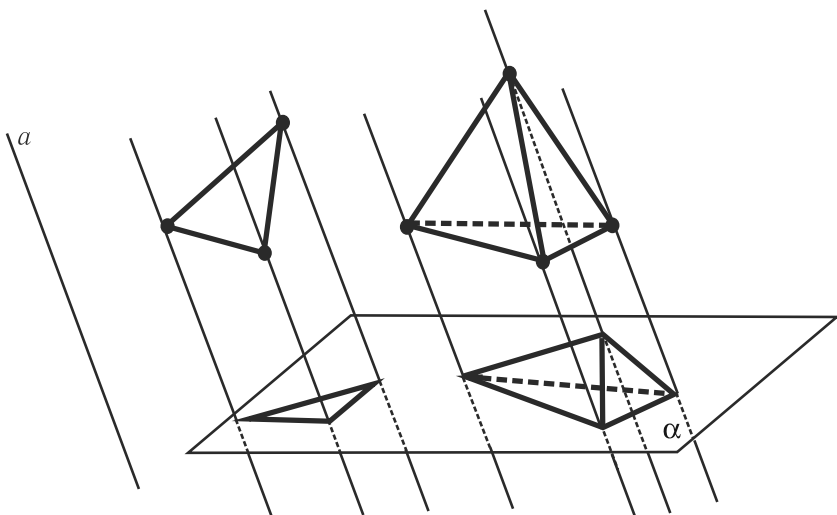
Любое изображение объемного тела на плоскости будет условным. Однако существует общепринятый способ построения чертежей — **параллельное проектирование**:

1. Возьмем объемное тело.
2. Выберем плоскость проекции.
3. Через каждую точку объемного тела проведем прямые, параллельные друг другу и пересекающие плоскость проекции под каким-либо углом. Каждая из этих прямых пересекает плоскость проекции в какой-либо точке. А все вместе эти точки образуют *проекцию* объемного тела на плоскость, то есть его плоское изображение.



α — плоскость проекции

Рассматривая любую геометрическую фигуру как множество точек, можно построить в заданной плоскости проекцию данной фигуры. Таким образом, можно получить изображение (или «проекцию») любой плоской или пространственной фигуры на плоскости.



Наглядным примером параллельного проектирования является отбрасываемая любым объектом в пространстве тень от солнечных лучей (направление параллельного проектирования) на Земле (плоскость проекций).

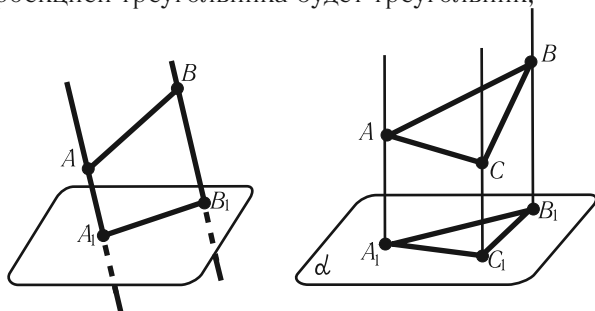
Основные свойства параллельного проектирования:

1. Проекцией точки является точка.
2. Проекцией прямой является прямая — свойство прямолинейности.
3. Проекцией точки, лежащей на некоторой прямой, является точка, лежащая на проекции данной прямой, — свойство принадлежности.
4. Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые — свойство сохранения параллельности.
5. Отношение проекций отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной и той же прямой, равно отношению самих отрезков.
6. Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций.

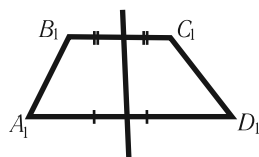
Таким образом, какой бы ракурс мы ни выбрали, проекциями параллельных отрезков на чертеже тоже будут параллельные отрезки.

Закономерности параллельного проектирования:

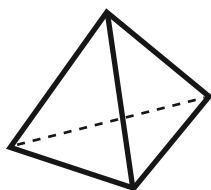
- проекцией отрезка будет отрезок, если отрезок перпендикулярен плоскости проекции, он отобразится в одну точку;
- проекцией треугольника будет треугольник;



- проекцией круга в общем случае окажется эллипс;
- проекцией прямоугольника — параллелограмм;
- любая трапеция изображается в виде произвольной трапеции. Сохраняется только отношение оснований. Равнобокая трапеция имеет ось симметрии. Ее изображение на рисунке справа.



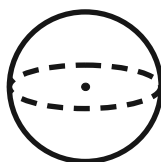
Изображение пространственных фигур в параллельной проекции



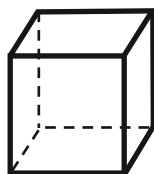
пирамида



конус



шар



куб

Если при параллельном проектировании прямые пересекают плоскость проекции под углом 90° , то речь идет о *прямоугольном проектировании*. С помощью прямоугольного проектирования строятся чертежи объемных деталей в технике. В этом случае говорят о виде сверху, виде спереди и виде сбоку.

В геометрических задачах на ЕГЭ часто требуется найти площадь прямоугольной проекции фигуры. Если S — площадь фигуры, тогда площадь ее прямоугольной проекции равна $S \cdot \cos \varphi$, где φ — угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.

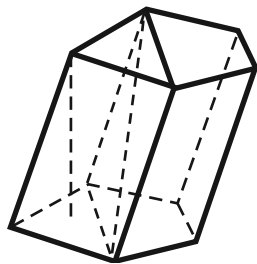
5.3. Многогранники

5.3.1. Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма

Призма — это многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммы, имеющие общие стороны с этими многоугольниками.

Равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями призмы*.

Грани призмы, отличные от оснований, называются *боковыми гранями*, а их ребра называются *боковыми ребрами*. Все боковые ребра равны между собой как параллельные отрезки, ограниченные двумя параллельными плоскостями. Все боковые грани призмы являются параллелограммами.



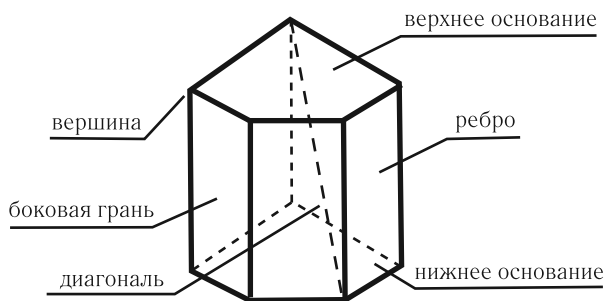
Поверхность призмы состоит из двух оснований и боковой поверхности.

Высотой призмы называется отрезок, являющийся общим перпендикуляром плоскостей, в которых лежат основания призмы. Высота призмы равна расстоянию между плоскостями оснований.

Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю призмы*.

Перпендикулярным сечением призмы называется многоугольник, плоскость которого перпендикулярна боковому ребру призмы, а вершины лежат на прямых, проходящих через боковые ребра.

Прямой призмой называется призма, у которой боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, другие призмы называются *наклонными*.



Призма, основанием которой является параллелограмм, называется **параллелепипедом**.

Площадью боковой поверхности S_{σ} призмы называется сумма площадей ее боковых граней.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т. е. на длину бокового ребра.

Площадью полной поверхности S_n призмы называется сумма площадей всех ее граней: $S_n = S_{\sigma} + 2S$, где S — площадь основания призмы, S_{σ} — площадь боковой поверхности.

Правильной призмой называется прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник.

Боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.

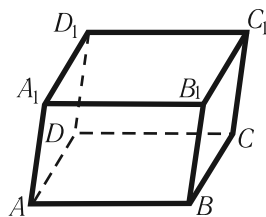
Объем прямой призмы равен произведению площади основания на длину бокового ребра.

5.3.2. Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда — параллелограммы. Отрезки, соединяющие вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной и той же грани, называются диагоналями параллелепипеда.

Свойства параллелепипеда:

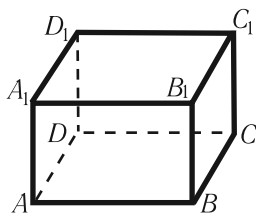
1. Середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии.
2. Противоположащие грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.
3. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.



Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания параллелепипеда, называется *прямым параллелепипедом*.

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*.

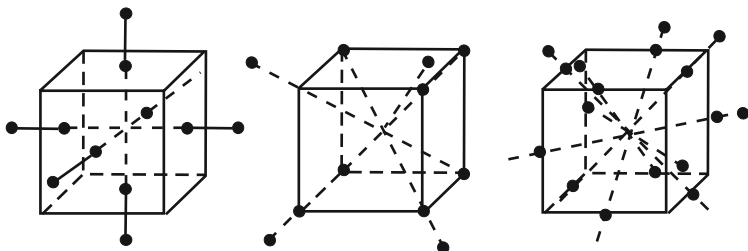
У прямоугольного параллелепипеда, как у всякого параллелепипеда, есть центр симметрии — точка пересечения его диагоналей. У него есть также три плоскости симметрии, проходящие через центр симметрии параллельно граням.



Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется **кубом**. Все грани куба — равные квадраты.

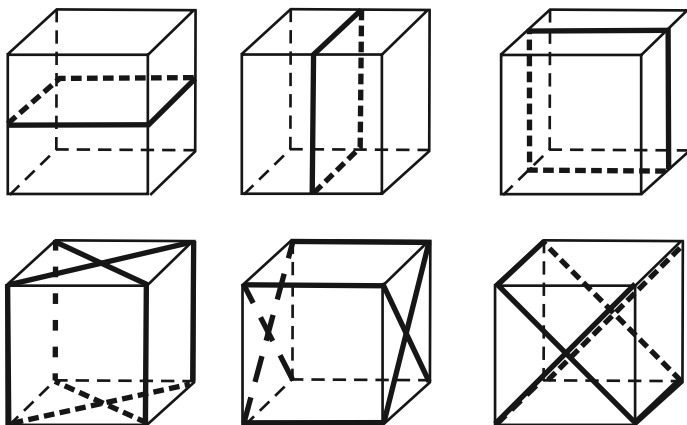
Объем куба вычисляется по формуле $V=a^3$, где a — длина ребра куба.

Оси симметрии в кубе — прямые, проходящие через центры противоположных граней (таких 3) либо через середины противоположных ребер (таких 6).



Центром симметрии куба является точка пересечения его диагоналей.

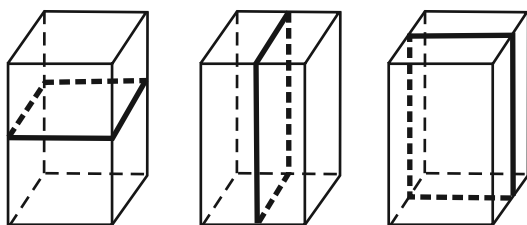
Плоскостей симметрии у куба также 9, и проходят они либо через противоположные ребра (таковых плоскостей 6), либо через середины противоположных ребер (таких — 3):



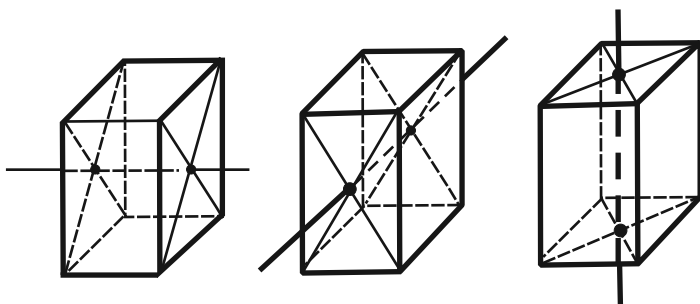
Симметрия прямоугольного параллелепипеда

Центр симметрии — точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

Плоскости симметрии — это плоскости, проходящие через середины параллельных ребер:

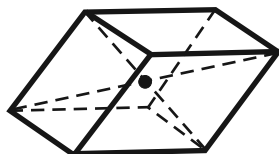


Осей симметрии три — это прямые, проходящие через точки пересечения диагоналей противоположащих граней:



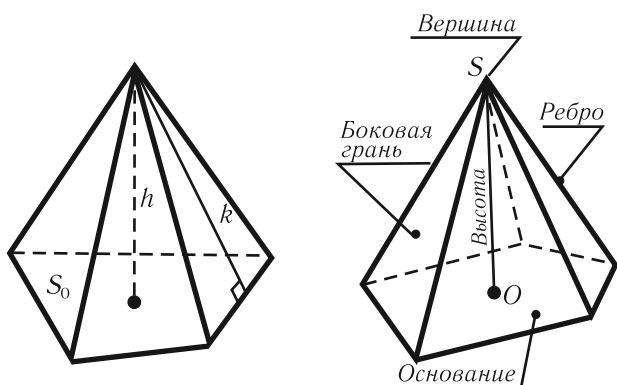
Симметрия параллелепипеда

Центр симметрии — точка пересечения диагоналей параллелепипеда.



5.3.3. Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида

Пирамида — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину.



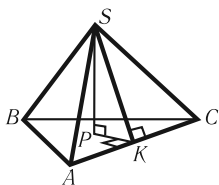
Элементы пирамиды:

- *апофема* — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины;
- *боковые грани* — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;

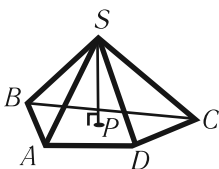
- *боковые ребра* — общие стороны боковых граней;
- *вершина пирамиды* — точка, соединяющая боковые ребра и не лежащая в плоскости основания;
- *высота* — отрезок перпендикуляра, проведенного через вершину пирамиды к плоскости ее основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра);
- *диагональное сечение пирамиды* — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;
- *основание* — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды.

По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырехугольные и т. д. Треугольная пирамида — это пирамида, в основании которой лежит треугольник.

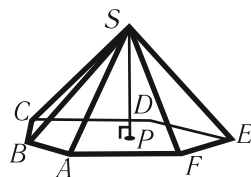
Виды пирамид



треугольная



четырехугольная



шестиугольная

Объем пирамиды вычисляется по формуле:

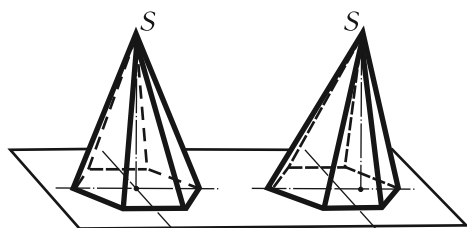
$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

где S — площадь основания и h — высота.

Боковая поверхность пирамиды — это сумма площадей боковых граней.

Полная поверхность пирамиды — это сумма площади боковой поверхности и площади основания: $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$.

Пирамида называется правильной, если основанием ее является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.



Пирамида
правильная

Пирамида
неправильная

Правильная пирамида обладает следующими свойствами:

- боковые ребра правильной пирамиды равны;
- в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники;
- в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около нее сферу;
- если центры вписанной и описанной сферы совпадают, то сумма плоских углов при вершине пирамиды равна π , а каждый из них соответственно $\frac{\pi}{n}$, где n — количество сторон многоугольника основания;
- площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_a, \text{ где } h_a \text{ — апофема.}$$

Усеченная пирамида — пирамида, которая получается следующим способом: берется произвольная пирамида и через точку бокового ребра проводится плоскость, параллельная основанию пирамиды. Данная плоскость разделяет пирамиду на две фигуры: подобную исходной пирамиде и многогранник, который называется усеченной пирамидой. Основаниями усеченной пирамиды служат подобные многоугольники.

Если усеченная пирамида получается из правильной пирамиды, то она называется **правильной усеченной пирамидой**.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды являются равными равнобедренными трапециями. Высота боковой грани

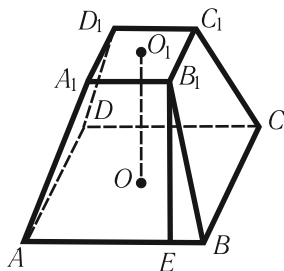
называется *апофемой* правильной усеченной пирамиды. Перпендикуляр, опущенный из точки верхнего основания на нижнее, называется *высотой* усеченной пирамиды.

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей оснований и боковых граней.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — усеченная правильная пирамида.

OO_1 — высота.

$B_1 E$ — апофема усеченной пирамиды.



Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

где h — высота усеченной пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды вычисляется по формуле:

$$S_{бок} = \frac{1}{2} (P + P_1) h_a,$$

где P и P_1 — периметры оснований усеченной правильной пирамиды, h_a — апофема.

5.3.4. Сечения куба, призмы, пирамиды

Плоская фигура, полученная при пересечении любого многогранника плоскостью, представляет собой некоторый многоугольник. Вершины этого многоугольника находятся как точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью, а стороны многоугольника строятся как линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью.

Сечение куба плоскостью

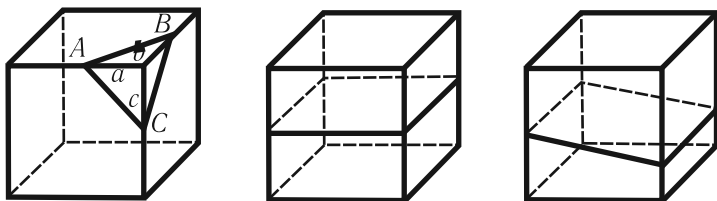
Если плоскость пересекает три ребра куба, выходящих из одной вершины, то в сечении получается треугольник. При этом если отсекаемые плоскостью отрезки ребер равны, то в сечении получается равносторонний треугольник, если равны два отрезка

из трех, то получается равнобедренный треугольник, наконец, если все три отрезка различны, то в сечении получается разносторонний треугольник.

Выясним, какие четырехугольники могут получаться в сечении куба плоскостью.

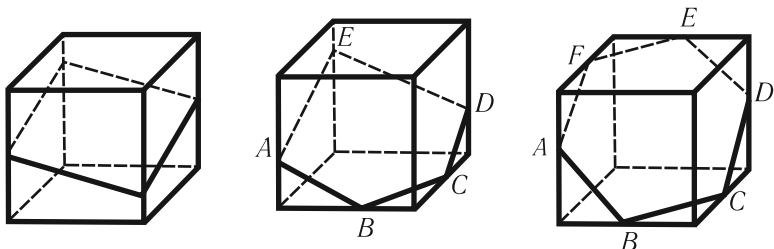
Если плоскость параллельна одной из граней куба, то в сечении получается квадрат. Если плоскость параллельна одному из ребер куба, то в сечении получается прямоугольник.

Если плоскость пересекает четыре параллельных ребра куба, то в сечении получается параллелограмм. Поскольку для любых четырех граней куба обязательно найдутся две из них, параллельные между собой, то в четырехугольнике, являющемся сечением куба плоскостью, обязательно найдутся две параллельные стороны. Таким образом, в сечении куба плоскостью не может получиться четырехугольник, у которого нет параллельных сторон.



На следующем рисунке показано сечение куба плоскостью в форме пятиугольника $ABCDE$. Прямые AB и DE , CD и AE параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Таким образом, в сечении куба плоскостью может получиться только тот пятиугольник, у которого имеется две пары параллельных сторон. В частности, не может получиться правильный пятиугольник.

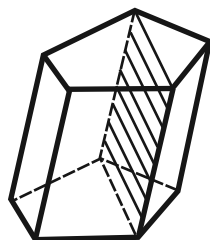


В сечении куба плоскостью может получиться только тот шестиугольник, у которого имеется три пары параллельных сторон. На рисунке показано сечение куба плоскостью в форме шестиугольника $ABCDEF$. Прямые AB и DE , BC и EF , CD и AF параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью. Поскольку у куба имеется только шесть граней, то в сечении куба плоскостью не может получиться многоугольник с числом сторон, большим шести.

Сечение призмы

Сечение призмы плоскостью, параллельной основанию, — в сечении образуется многоугольник, равный многоугольнику, лежащему в основании.

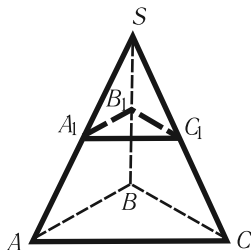
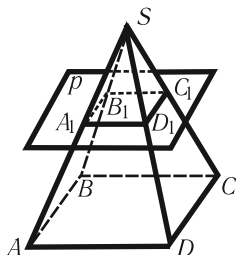
Сечение призмы плоскостью, проходящей через два несоседних боковых ребра, — в сечении образуется параллелограмм. Такое сечение называется диагональным сечением призмы. В некоторых случаях может получаться ромб, прямоугольник или квадрат.



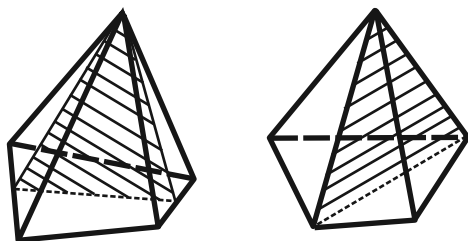
В сечении правильной призмы плоскостью, проходящей через два несоседних боковых ребра, образуется прямоугольник. В некоторых случаях может образоваться квадрат.

Сечение пирамиды

Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, — в сечении образуется правильный многоугольник, подобный многоугольнику, лежащему в основании.



Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники. В частности, треугольниками являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра пирамиды.



В сечении правильной пирамиды плоскостью, проходящей через два несоседних боковых ребра, получается равнобедренный треугольник. В некоторых случаях может образоваться равносторонний треугольник.

5.3.5. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)

Правильным называется выпуклый **многогранник**, гранями которого являются правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине которого сходится одно и то же число ребер.

Все ребра правильного многогранника — равные отрезки, все плоские углы правильного многогранника также равны.

Существует пять различных правильных многогранников (выпуклых):

- 1) правильный четырехгранник (правильный тетраэдр);
- 2) правильный шестигранник (куб);
- 3) правильный восьмигранник (правильный октаэдр);
- 4) правильный двенадцатигранник (правильный додекаэдр);
- 5) правильный двадцатигранник (правильный икосаэдр).

Изучением правильных многогранников занимались Пифагор и его ученики. Их поражала красота, совершенство, гармония этих фигур. Пифагорейцы считали правильные многогранники

божественными фигурами и использовали в своих философских сочинениях: первоосновам бытия — огню, земле, воздуху, воде — придавалась форма соответственно тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра. Вселенная имела форму додекаэдра. Позже учение пифагорейцев о правильных многогранниках изложил в своих трудах другой древнегреческий ученый, философ-идеалист Платон. С тех пор многогранники стали называться Платоновыми. Названия многогранников связаны с числом их граней.

Так, в переводе с греческого «тетра» — «четыре», «эдрон» — «грань», отсюда происходит название тетраэдра.

Тетраэдр — многогранник, четыре грани которого равно-сторонние равные треугольники. Тетраэдр имеет четыре вершины и шесть ребер, а сумма плоских углов при каждой вершине равна 180° .

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}, \quad S_{\text{полн}} = a^2 \sqrt{3},$$

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{3h}{4}, \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{h}{4}, \quad h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Обозначения:

a — длина ребра;

V — объем;

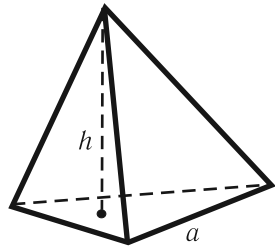
$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности;

R — радиус описанной сферы;

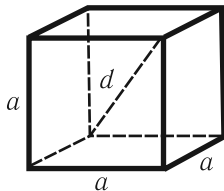
r — радиус вписанной сферы;

h — высота.



Куб

Куб имеет шесть граней, поэтому называется правильным **гексаэдром** (по-гречески «гекса» означает «шесть»). Шесть граней куба — равные квадраты. Куб имеет восемь вершин и двенадцать ребер, а сумма плоских углов при каждой вершине равна 270° .



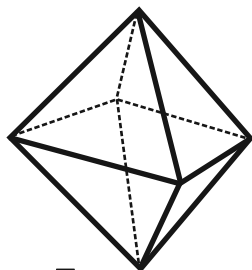
$$V = a^3, \quad S_{\text{полн}} = 6a^2, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{a}{2}, \quad h = a, \quad d = a\sqrt{3}.$$

Октаэдр

Октаэдр — правильный многогранник, восемь граней которого являются равносторонними равными треугольниками (по-гречески «окта» — «восемь»).

Октаэдр имеет шесть вершин и двенадцать ребер, а сумма плоских углов при каждой вершине равна 240° .

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}, \quad S_{\text{полн}} = 2a^2 \sqrt{3}, \quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



Икосаэдр

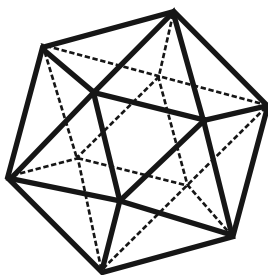
Третий многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, — **икосаэдр** («икоса» — «двадцать»). Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников: двадцать граней — равносторонние равные треугольники. Икосаэдр имеет двенадцать вершин и тридцать ребер, а сумма плоских углов при каждой вершине равна 300° .

$$V = \frac{5a^3 (3 + \sqrt{5})}{12},$$

$$S_{\text{полн}} = 5a^2 \sqrt{3},$$

$$R = \frac{a\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4},$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}.$$



Додекаэдр

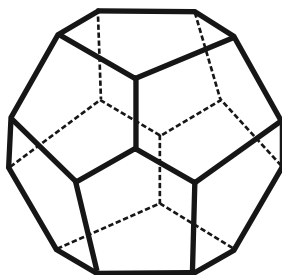
Додекаэдр — это правильный многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому его называют правильным додекаэдром («доде» — «двенадцать»). Додекаэдр имеет двадцать вершин и тридцать ребер, а сумма плоских углов при каждой вершине равна 324° .

$$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4},$$

$$S_{\text{полн}} = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})},$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4},$$

$$r = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}.$$



5.4. Тела и поверхности вращения

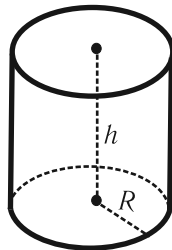
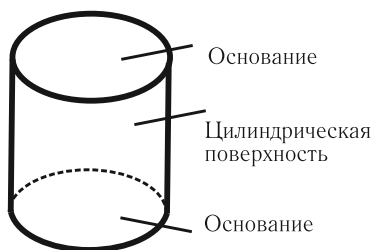
5.4.1. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка

Цилиндр — геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими ее.

Круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, — *образующими цилиндра*.

Основания цилиндра равны и лежат в параллельных плоскостях. У цилиндра образующие параллельны и равны.

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих. Боковая поверхность называется цилиндрической.



Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

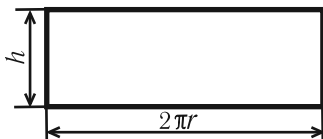
Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением*.

Призмой, вписанной в цилиндр, называется такая призма, основания которой — равные многоугольники, вписанные в основание цилиндра. Ее боковые ребра являются образующими цилиндра.

Призма называется описанной около цилиндра, если ее основания — равные многоугольники, описанные около оснований цилиндра. Плоскости ее граней касаются боковой поверхности цилиндра.

Развертка цилиндра. Если боковую поверхность цилиндра развернуть и положить на плоскость, то получим прямоугольник.



Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади ее развертки.

Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра равна площади прямоугольника, основание которого равно длине окружности основания ($2\pi r$), а высота равна высоте цилиндра h и вычисляется по формуле:

$$S_{\text{бок}} = C \cdot h \text{ или } S_{\text{бок}} = 2\pi r h.$$

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Площадь каждого основания цилиндра равна πr^2 , следовательно, площадь полной поверхности цилиндра $S_{\text{полн}}$ вычисляется по формуле:

$$S_{\text{полн}} = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h.$$

5.4.2. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка

Тело, которое состоит из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга (вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания), называется **круговым конусом**.

Круг называется *основанием* конуса.

Образующие конуса — отрезки, соединяющие вершину конуса P с точками окружности основания.

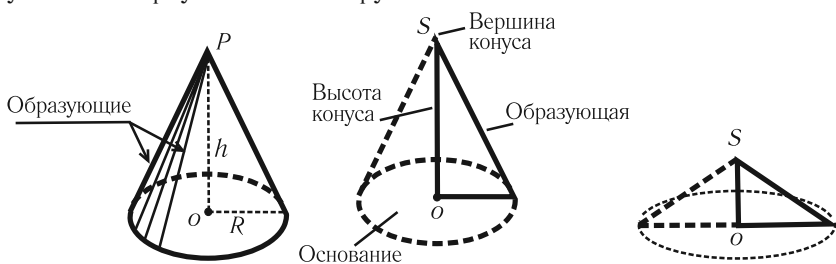
Высота конуса h — перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания.

Высота прямого кругового конуса, опущенная из его вершины на основание, проходит через центр основания.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, является высотой конуса.

Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Прямой круговой конус можно получить вращением прямогоугольного треугольника вокруг любого из его катетов.



Боковая поверхность конуса — поверхность, образованная отрезками, соединяющими каждую точку окружности, лежащей в основании конуса, с вершиной конуса (образующими).

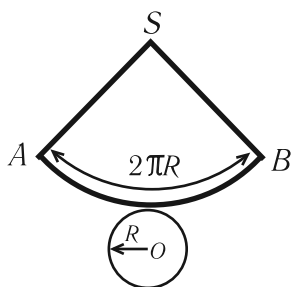
Боковая поверхность конуса называется *конической поверхностью*.

Если боковую поверхность прямого кругового конуса разрезать по одной из его образующих, то в *развертке* получится сектор круга, радиус которого равен длине образующей конуса.

Развертка конуса изображена на рисунке справа.

Сектор SAB — развертка боковой поверхности конуса, а круг с центром O — основание конуса.

Площадь боковой поверхности конуса равна площади ее развертки, то есть площади кругового сектора SAB .



Длина дуги AB равняется длине окружности основания конуса ($2\pi R$), а радиус AS этой дуги — образующая конуса.

Тогда площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле: $S_{бок} = \pi Rl$, где R — радиус основания конуса, а l — образующая конуса.

Площадь полной поверхности конуса (или просто поверхность конуса) равна сумме площадей основания и боковой поверхности.

Так как площадь основания конуса равна πR^2 (как площадь круга), то площадь полной поверхности конуса будет равна:

$$S_{полн} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R(R + l).$$

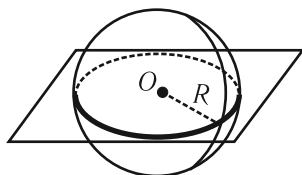
Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

5.4.3. Шар и сфера, их сечения

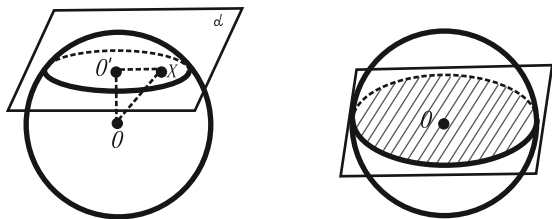
Поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки, называется *сферой*.

Центр сферы — данная точка; *радиус сферы* — данное расстояние; *диаметр сферы* — отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящей через ее центр.



Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**.

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость. Большим кругом называется сечение шара диаметральной плоскостью — плоскостью, проходящей через центр шара.



Примеры из окружающей нас природы: Земля и глобус имеют форму, близкую к шару. Если рассмотреть сечение Земли плоскостью, проходящей через экватор, то вся Земля разобьется на два полушария: северное и южное. Баскетбольные, теннисные, футбольные, волейбольные мячи имеют форму шара.

Основные геометрические формулы

Площадь S сферы радиуса R вычисляется по формуле:

$$S = 4\pi R^2.$$

Объем шара, ограниченного сферой, вычисляется по формуле:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

5.5. Измерение геометрических величин

5.5.1. Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной окружности

Величина угла — это число, показывающее, сколько раз угол, выбранный за единицу измерения углов, и его части укладываются в данном угле.

Единицей измерения углов является градус (обозначение $^\circ$) — это угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укла-

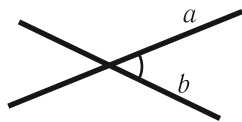
дываются в данном угле, называется градусной мерой угла. Один градус состоит из 60 минут (их обозначение $'$); одна минута — соответственно из 60 секунд (обозначаются $''$). Например, градусная мера некоторого угла равна $44^{\circ}14'32''$.

Каждый угол имеет определенную *градусную меру*, большую нуля. Развернутый угол равен 180° . *Градусная мера угла* равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

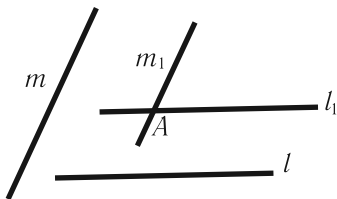
От любого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180° , и только один.

5.5.2. Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями

Угол между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.



Углом между двумя непересекающимися прямыми в пространстве. Пусть в пространстве заданы две прямые l и m . Через некоторую точку A пространства проведем прямые l_1 и m_1 следующим образом:



$$l_1 \parallel l \text{ и } m_1 \parallel m.$$

Точка A может быть выбрана произвольно, в частности она может лежать на одной из данных прямых.

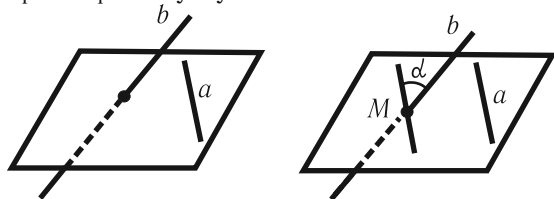
Углом между непараллельными прямыми l и m называется величина наименьшего из смежных углов, образованных пересекающимися прямыми l_1 и m_1 ($l_1 \parallel l$, $m_1 \parallel m$).

Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Из определения следует, что если угол α между прямыми измеряется в градусах, то $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, а если в радианах, то $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Угол между скрещивающимися прямыми — это угол между двумя пересекающимися прямыми, которые соответственно параллельны заданным скрещивающимся прямым.

Проиллюстрируем определение угла между скрещивающимися прямыми. Пусть в пространстве заданы две скрещивающиеся прямые a и b . Построим прямые a_1 и b_1 так, чтобы они были параллельны скрещивающимся прямым a и b соответственно и проходили через некоторую точку пространства M . Из определения следует, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки в пространстве. Поэтому в качестве точки M можно взять любую точку, принадлежащую одной из скрещивающихся прямых. Пусть M принадлежит прямой b . Таким образом, мы получаем две пересекающиеся прямые a_1 и b_1 , угол между которыми равен углу α .



Так как угол между скрещивающимися прямыми определяется через угол между пересекающимися прямыми, то нахождение угла между скрещивающимися прямыми сводится к нахождению угла между соответствующими пересекающимися прямыми в трехмерном пространстве.

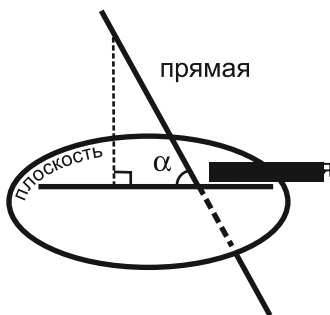
Для нахождения угла между скрещивающимися прямыми подходят различные методы. Можно, выполнив необходимые построения, связать искомый угол с каким-либо известным из условия углом, основываясь на равенстве или подобии фигур, помогает в нахождении углов теорема косинусов, а иногда к результату приводит определение синуса, косинуса и тангенса угла прямоугольного треугольника. Эффективен в нахождении угла между скрещивающимися прямыми метод координат.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

В качестве угла между прямой и плоскостью выбирается острый угол.

Если прямая параллельна плоскости, значит, угол между прямой и плоскостью равен нулю.

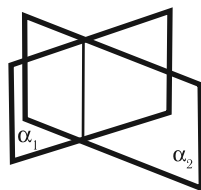


Если прямая перпендикулярна плоскости, ее проекцией на плоскость окажется точка. Очевидно, в этом случае угол между прямой и плоскостью равен 90° .

Угол между плоскостями

Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

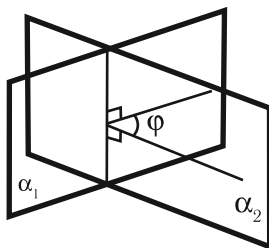
Две пересекающиеся плоскости образуют две пары равных между собой двугранных углов: α_1 и α_2 .



Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла.

Чтобы построить линейный угол двугранного угла, нужно взять на линии пересечения плоскостей произвольную точку и в каждой плоскости провести к этой точке прямую перпендикулярно линии пересечения плоскостей. Угол, образованный этими прямыми, и есть линейный угол двугранного угла.



Величиной угла между плоскостями называется величина меньшего двугранного угла.

5.5.3. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника

Длина отрезка



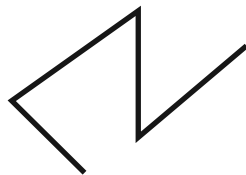
Две точки A и B , соединенные прямой линией, называются отрезком AB . Тот же отрезок можно прочесть BA . Точки A и B называются концами отрезка AB . Любые две точки можно соединить только одним отрезком. Длину отрезка AB называют расстоянием между точками A и B .

Для измерения длин применяют такие единицы измерения, как миллиметр, сантиметр, дециметр, метр. Большие расстояния измеряются в километрах.

$$1 \text{ см} = 10 \text{ мм}; \quad 1 \text{ дм} = 10 \text{ см}; \quad 1 \text{ м} = 100 \text{ см}; \quad 1 \text{ км} = 1000 \text{ м}.$$

Длина ломаной

Ломаная состоит из отрезков, конец одного отрезка является началом другого, 2 соседних отрезка не лежат на одной прямой.

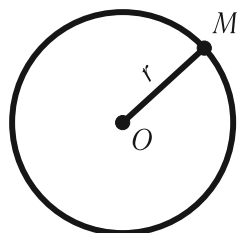


Отрезки ломаной линии называют *звеньями ломаной*, место, где соединяются 2 звена, называется *вершиной*.

Чтобы найти длину ломаной, нужно длину ее звеньев сложить.

Длина окружности

Для вычисления длины окружности используют формулу: $C = 2\pi R$, где C — длина окружности, R — радиус окружности, π — число, равное отношению длины окружности к ее диаметру. Для любых окружностей это число одно и то же ($\pi \approx 3,14$).

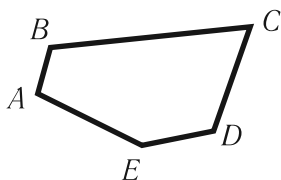


Периметр многоугольника

Замкнутая ломаная составляет многоугольник. Длину замкнутой ломаной, ограничивающей многоугольник, называют периметром этого многоугольника.

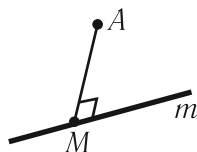
Периметр обозначают буквой P :

$$P = AB + BC + CD + DE + EA.$$

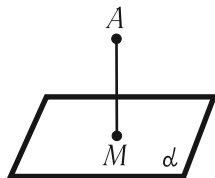


5.5.4. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние между параллельными плоскостями

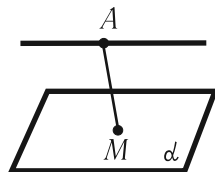
Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.



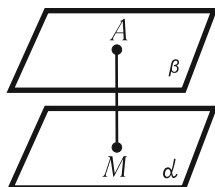
Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.



Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из любой точки этой прямой.

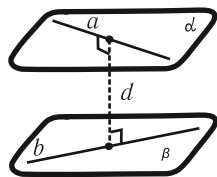


Расстояние между параллельными плоскостями — это расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой.



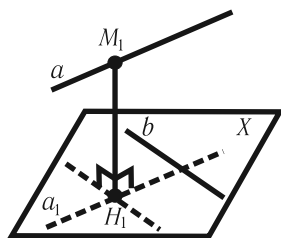
Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

То есть, расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых они лежат.



В свою очередь, расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью есть расстояние от некоторой точки прямой до плоскости. Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми — это расстояние от некоторой точки одной из скрещивающихся прямых до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой прямой.

Рассмотрим скрещивающиеся прямые a и b . Отметим на прямой a некоторую точку M_1 , через прямую b проведем плоскость χ , параллельную прямой a , и из точки M_1 опустим перпендикуляр M_1H_1 на плоскость χ . Длина перпендикуляра M_1H_1 и есть расстояние между скрещивающимися прямыми a и b .



При нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми основная сложность часто заключается в том, чтобы увидеть или построить отрезок, длина которого равна искомому расстоянию. Если такой отрезок построен, то в зависимости от условий задачи его длина может быть найдена с помощью теоремы Пифагора, признаков равенства или подобия треугольников. Если же в трехмерном пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$ и в ней заданы скрещивающиеся прямые a и b , то справиться с задачей вычисления расстояния между заданными скрещивающимися прямыми позволяет метод координат.

5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора

Площадь треугольника

I. Произвольный треугольник

Введем некоторые обозначения:

a, b, c — стороны треугольника;

S — площадь треугольника;

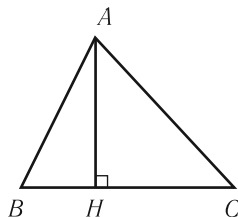
α — угол между сторонами a и b ;

p — полупериметр треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$;

R — радиус окружности, описанной около треугольника;

r — радиус окружности, вписанной в треугольник;

h_a — высота, проведенная к стороне a .



Существуют несколько формул для вычисления площади произвольного треугольника:

1. Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне: $S = \frac{1}{2}ah_a$.

2. Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha$.

3. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

4. Площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной в треугольник окружности: $S = pr$.

5. Площадь треугольника равна отношению произведения сторон треугольника на 4 радиуса описанной около треугольника окружности: $S = \frac{abc}{4R}$.

II. Прямоугольный треугольник

Введем обозначения: a, b — катеты; c — гипотенуза; h_c — высота, проведенная к гипотенузе.

1. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов: $S = \frac{1}{2}ab$.

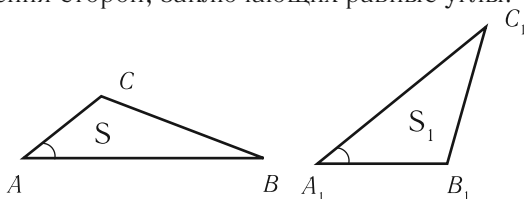
2. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведенную к гипотенузе: $S = \frac{1}{2}ch_c$.

III. Равносторонний треугольник $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Теоремы о площадях треугольников

1. Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

2. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.



$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

Площадь параллелограмма

Введем обозначения:

S — площадь параллелограмма;

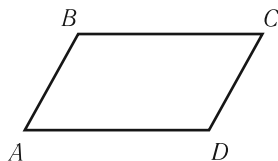
a и b — смежные стороны;

α — угол между ними;

d_1 и d_2 — диагонали параллелограмма;

φ — угол между диагоналями;

h_a — высота, проведенная к стороне a .



Существуют несколько формул для вычисления площади параллелограмма:

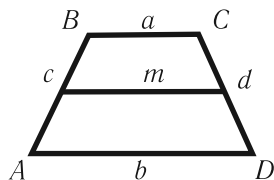
1. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне: $S = ah_a$.
2. Площадь параллелограмма равна произведению смежных сторон на синус угла между ними: $S = ab \cdot \sin \alpha$.
3. Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей параллелограмма на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi.$$

Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h.$$



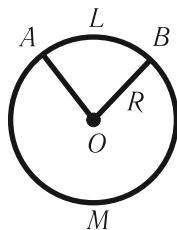
Площадь круга

Обозначим площадь круга буквой S , тогда формула для вычисления площади круга: $S = \pi R^2$.

Площадь кругового сектора

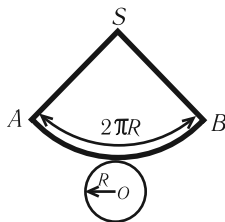
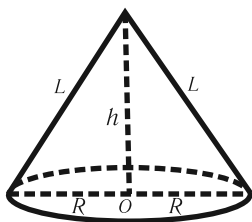
Формула для вычисления площади кругового сектора, ограниченного дугой с градусной мерой α , имеет вид:

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha.$$



5.5.6. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы

Площадь боковой поверхности конуса равна площади ее развертки, то есть площади кругового сектора SAB .



Длина дуги AB равняется длине окружности основания конуса ($2\pi R$), а радиус AS этой дуги — образующая конуса.

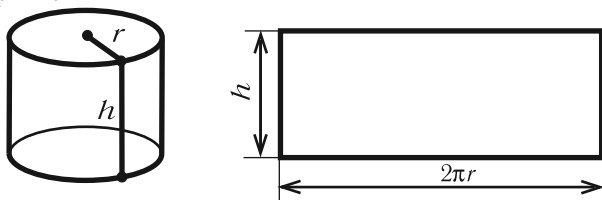
Тогда площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле: $S_{\text{бок}} = \pi RL$, где R — радиус основания конуса, а L — образующая конуса.

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей основания и боковой поверхности.

Так как площадь основания конуса равна πR^2 (как площадь круга), то площадь полной поверхности конуса будет равна:

$$S_{\text{полн}} = \pi R^2 + \pi RL = \pi R(R+L).$$

Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади ее развертки.

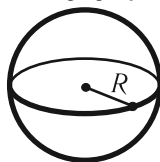


Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра равна площади прямоугольника, основание которого равно длине окружности основания ($2\pi r$), а высота равна высоте цилиндра h и вычисляется по формуле: $S_{бок} = C \cdot h$ или $S_{бок} = 2\pi r h$.

Площадь полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Площадь каждого основания цилиндра равна πr^2 , следовательно, площадь полной поверхности цилиндра $S_{полн}$ вычисляется по формуле:

$$S_{полн} = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

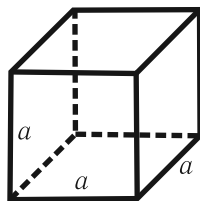
Площадь S сферы радиуса R вычисляется по формуле: $S = 4\pi R^2$.



5.5.7. Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

Объем куба равен кубу его ребра.

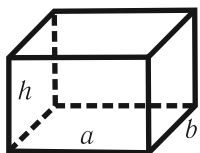
$V = a^3$, где V — объем куба,
 a — длина ребра куба.



Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты или произведению площади основания на высоту.

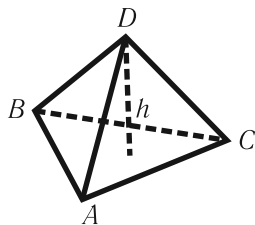
$V = abh$, где V — объем прямоугольного параллелепипеда, a — длина, b — ширина, h — высота.

$V = S_{осн} \cdot h$, где $S_{осн}$ — площадь основания.



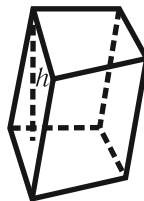
Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$, где V — объем пирамиды, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды, h — высота пирамиды.



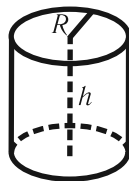
Объем призмы равен произведению площади основания призмы на высоту:

$V = S_{\text{осн}} \cdot h$, где V — объем призмы, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, h — высота призмы.



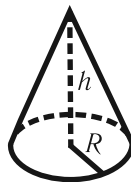
Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, где V — объем цилиндра, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания цилиндра, R — радиус цилиндра, h — высота цилиндра.



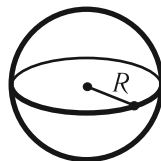
Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, где V — объем конуса, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания конуса, R — радиус конуса, h — высота конуса.



Объем шара, ограниченного сферой, вычисляется по формуле:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

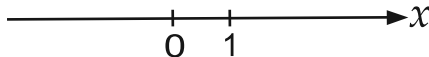


5.6. Координаты и векторы

5.6.1. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Числовая ось

Числовой осью (координатной прямой) Ox называют прямую линию, на которой точка O выбрана началом отсчета, направление Ox указано в качестве положительного направления и отмечен отрезок, длина которого принята за единицу длины.



Отрезок, длина которого принята за единицу длины, называют **масштабом**.

Каждая точка числовой оси имеет **координату**, являющуюся вещественным числом. Координата точки O равна нулю. Координата произвольной точки A , лежащей на луче Ox , равна длине отрезка OA .

Координата произвольной точки A числовой оси, не лежащей на луче Ox , отрицательна, а по абсолютной величине равна длине отрезка OA .

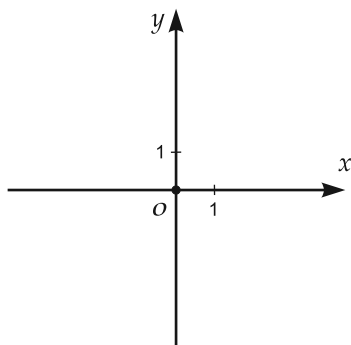
Прямоугольная декартова система координат на плоскости

Введем прямоугольную систему координат на плоскости. Для этого проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, выберем на каждой из них положительное направление, указав его стрелкой, и выберем на каждой из них масштаб (единичный отрезок). Обозначим точку пересечения этих прямых буквой O и будем считать ее началом отсчета. Так мы получили прямоугольную систему координат на плоскости.

Каждую из прямых с выбранным началом отсчета O , направлением и масштабom называют **координатной прямой** или **координатной осью**.

Прямоугольную систему координат на плоскости обычно обозначают Oxy , где Ox и Oy — ее координатные оси. Ось Ox называют **осью абсцисс**, а ось Oy — **осью ординат**.

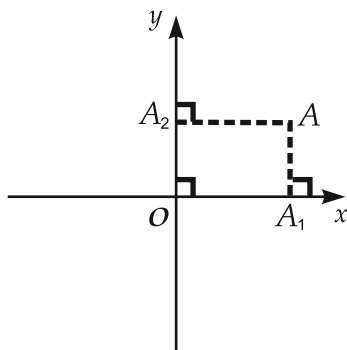
Обычно единица измерения длины на осях Ox и Oy выбирается одинаковая и откладывается от начала координат на каждой координатной оси в положительном направлении (отмечается штришком на координатных осях и рядом записывается единица), ось абсцисс направляется вправо, а ось ординат — вверх.



Прямоугольную систему координат часто называют декартовой, так как ее на плоскости впервые ввел Рене Декарт. Еще чаще прямоугольную систему координат называют **прямоугольной декартовой системой координат**, собирая все воедино.

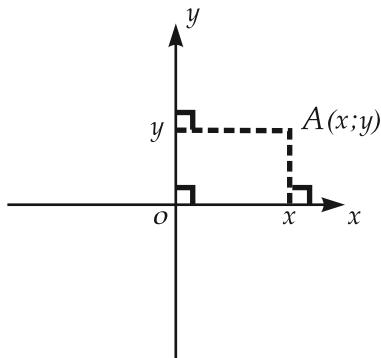
Если на плоскости ввести какую-нибудь систему прямоугольных декартовых координат Oxy , то каждая точка плоскости приобретет **две координаты** — **абсциссу и ординату**, которые вычисляются следующим образом.

Пусть A — произвольная точка плоскости. Опустим из точки A перпендикуляры AA_1 и AA_2 на прямые Ox и Oy соответственно:



Абсциссой точки A называют координату точки A_1 на числовой оси Ox , **ординатой точки** A называют координату точки A_2 на числовой оси Oy .

Координаты (абсциссу и ординату) точки A в прямоугольной декартовой системе координат Oxy принято обозначать $A(x; y)$.



Если точка A лежит на оси ординат y , то $x=0$.

Если точка A лежит на оси абсцисс x , то $y=0$.

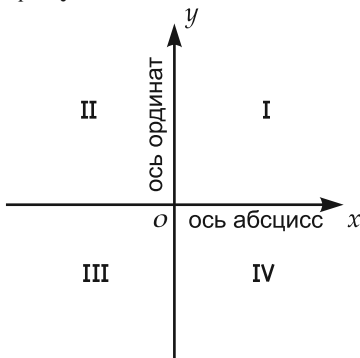
Точка O , называемая **началом координат**, имеет координаты $O(0;0)$.

В прямоугольной декартовой системе координат Oxy числовую ось Ox называют **осью абсцисс**, а числовую ось Oy называют **осью ординат**.

Каждая прямоугольная декартова система координат делит плоскость на четыре **координатные четверти (квадранта)**, нумерация которых показана на рисунке.

Плоскость, на которой задана прямоугольная декартова система координат, называют **координатной плоскостью**.

Ось абсцисс задается на координатной плоскости уравнением $y=0$, ось ординат задается на координатной плоскости уравнением $x=0$.



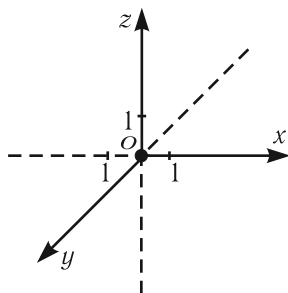
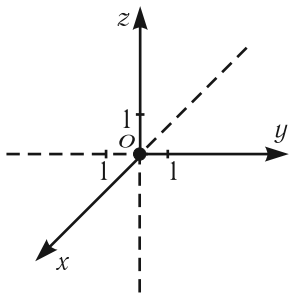
Прямоугольная система координат в трехмерном пространстве

Аналогично задается прямоугольная система координат $Oxyz$ в трехмерном евклидовом пространстве, только берутся не две, а три взаимно перпендикулярные прямые. Другими словами, к координатным осям Ox и Oy добавляется координатная ось Oz , которую называют **осью аппликата**.

В зависимости от направления координатных осей различают правую и левую прямоугольные системы координат в трехмерном пространстве.

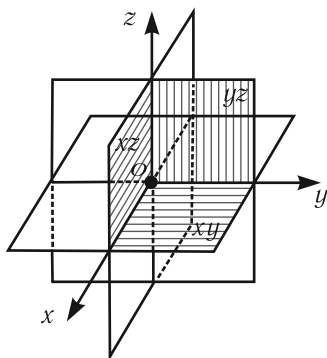
Если смотреть с положительного направления оси Oz и кратчайший поворот от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy происходит против хода часовой стрелки, то система координат называется **правой**.

Если смотреть с положительного направления оси Oz и кратчайший поворот от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy происходит по ходу часовой стрелки, то система координат называется **левой**.



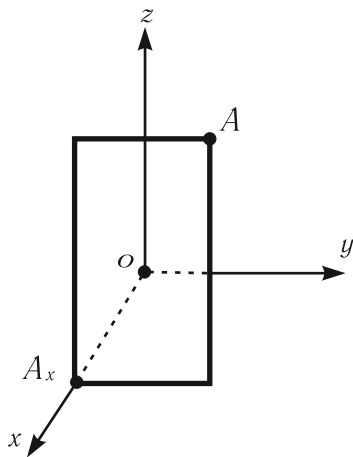
Возьмем три взаимно перпендикулярные прямые x , y , z , пересекающиеся в точке O . Через каждую пару прямых проведем плоскости. Получим три плоскости xy , xz и yz .

Плоскости xy , xz и yz называются координатными плоскостями. Точка O — начало координат.



Координатой x точки A называется число, равное абсолютной величине длины отрезка OA_x , — положительное, если точка A_x лежит на положительной полуоси x , отрицательное, если на отрицательной полуоси.

Координаты точки A в пространстве записываются так: $A(x; y; z)$. Число x называется абсциссой, y — ординатой, z — аппликатой точки A .



5.6.2. Формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы

Расстояние между двумя точками на плоскости

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат даны две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$. Выведем формулу определения расстояния между этими точками.

Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, перпендикулярные координатным осям Ox и Oy .

В зависимости от расположения точек A_1 и A_2 возможны следующие варианты:

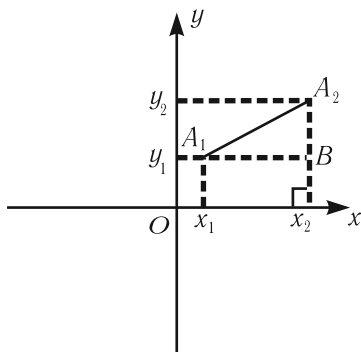
1. Если точки A_1 и A_2 совпадают, то расстояние между ними равно нулю.
2. Если точки A_1 и A_2 лежат на прямой, перпендикулярной оси абсцисс, то проекции этих точек на ось Ox совпадают, а расстояние равно $|y_2 - y_1|$.
3. Аналогично, если точки A_1 и A_2 лежат на прямой, перпендикулярной оси ординат, то расстояние от точки A_1 до точки A_2 находится как $|x_2 - x_1|$.
4. Точки A_1 и A_2 не совпадают и не лежат на прямой, перпендикулярной координатной оси. Найдем расстояние между ними.

Поскольку в *прямоугольном треугольнике* A_1A_2B длина катета A_1B равна $|x_2 - x_1|$, а длина катета A_2B равна $|y_2 - y_1|$, то по *теореме Пифагора*

$$|A_1A_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Следовательно,

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Таким образом, **расстояние между двумя точками** координатной плоскости $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1)$$

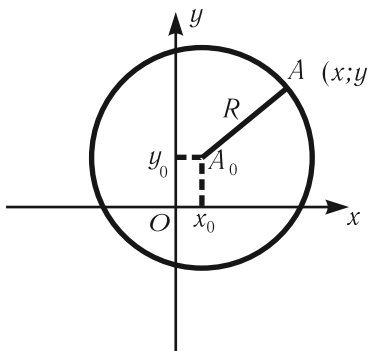
Уравнение окружности на координатной плоскости

Рассмотрим на координатной плоскости Oxy окружность радиуса R с центром в точке $A_0(x_0; y_0)$.

Поскольку расстояние от любой точки окружности до центра равно радиусу, то, в соответствии с формулой (1), получаем:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

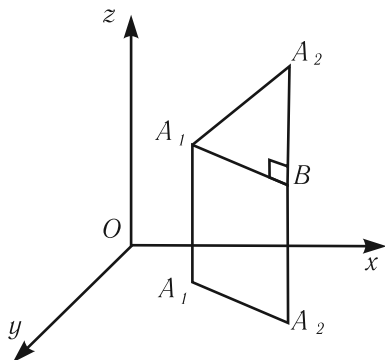
Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ и есть искомое **уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A_0(x_0; y_0)$** .



Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

Формула расстояния между двумя точками в пространстве

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ в пространстве. Формула для нахождения расстояния от точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ до точки $A_2(x_2; y_2; z_2)$:



$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Эта формула также справедлива, если точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ совпадают; принадлежат одной из координатных осей или прямой, параллельной одной из координатных осей; принадлежат одной из координатных плоскостей или плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей.

Например, если в трехмерном пространстве заданы координаты двух точек $A(1; 2; 3)$ и $B(-7; -2; 4)$, тогда расстояние между данными точками равно:

$$AB = \sqrt{(-7-1)^2 + (-2-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{64+16+1} = \sqrt{81} = 9.$$

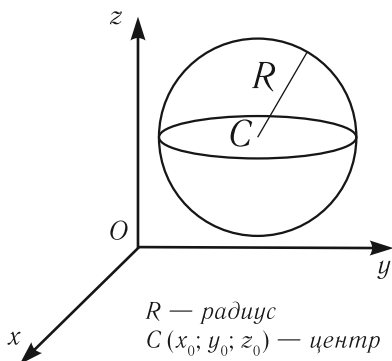
Ответ: 9.

Уравнение сферы

Пусть в прямоугольной системе координат задана сфера с центром в точке $C(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R .

$M(x; y; z)$ — произвольная точка, принадлежащая сфере, следовательно, по формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$



R — радиус
 $C(x_0; y_0; z_0)$ — центр

Так как $MC=R$, то $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$.

Если точка M не лежит на сфере, то $MC \neq R$, то есть координаты точки M не удовлетворяют уравнению. Следовательно, в прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром $C(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

Сфера радиуса R с центром в начале координат представлена уравнением:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

5.6.3. Вектор, модуль вектора, равенство векторов; сложение векторов и умножение вектора на число

Величина, полностью характеризующаяся только своим числовым значением в выбранной системе единиц, называется **скалярной** или **скаляром**. Например, масса тела, объем, время и т. д.

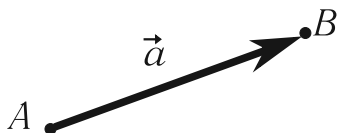
Величина, характеризующаяся числовым значением и направлением, называется **векторной** или **вектором**. Векторными величинами являются, например, перемещение, сила, скорость, ускорение.

Например, ускорение свободного падения направлено к поверхности Земли, а величина его равна $9,8 \text{ м/с}^2$. Импульс, напряженность электрического поля, индукция магнитного поля — тоже векторные величины.

Геометрически векторы изображаются направленными отрезками.

Направленный отрезок называется вектором.

Если начало вектора — точка A , а его конец — точка B , то вектор обозначается \overrightarrow{AB} или \vec{a} .



От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один, используя параллельный перенос.

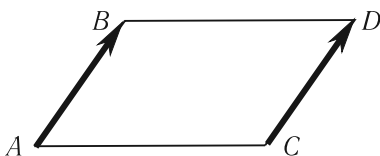
Нулевой вектор — точка в пространстве. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет направления.

Обозначается: $\vec{0}$.

Модуль вектора (абсолютная величина) — это длина отрезка AB .

Длина нулевого вектора равна нулю.

Равными называются векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковое направление. Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку плоскости.



Единичным называется вектор, длина которого равна 1.

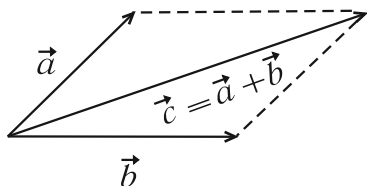
Сложение векторов

Для сложения векторов есть два способа.

1. Правило параллелограмма

Чтобы сложить векторы \vec{a} и \vec{b} по правилу параллелограмма, нужно:

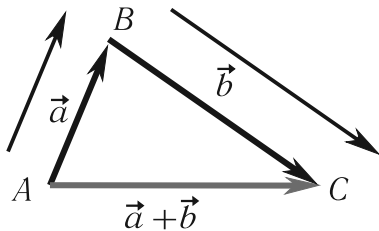
- отложить оба вектора от одной произвольной точки плоскости;
- достроить до параллелограмма;
- из той же точки провести диагональ параллелограмма, это и будет сумма векторов \vec{a} и \vec{b} .



2. Правило треугольника

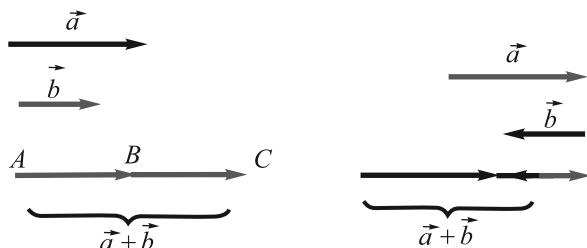
Чтобы сложить векторы по правилу треугольника нужно:

- отложить от произвольной точки A вектор \overline{AB} , равный вектору \vec{a} ;
- от точки B (конца первого вектора) отложить вектор \overline{BC} , равный вектору \vec{b} ;
- соединить начало первого вектора и конец второго. Вектор \overline{AC} и есть сумма векторов \vec{a} и \vec{b} :



$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

3. Рисунки, иллюстрирующие сложение коллинеарных векторов:



Законы сложения векторов:

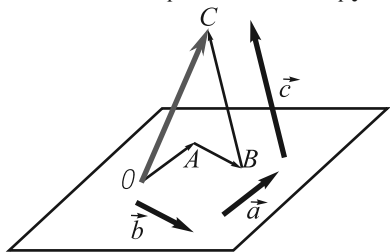
1. Переместительный закон: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. Сочетательный закон: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Правило многоугольника применяется, если нужно найти сумму трех или большего числа векторов.

Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.

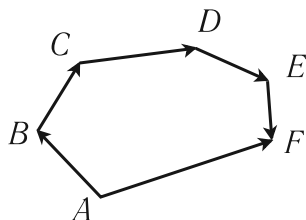
Найдем сумму трех векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} :

- 1) от произвольной точки O отложим \vec{OA} , равный вектору \vec{a} ;
- 2) затем от точки A отложим вектор \vec{AB} , равный вектору \vec{b} ;
- 3) от точки B отложим вектор \vec{BC} , равный вектору \vec{c} ;
- 4) получается результирующий вектор $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов (правило многоугольника). Если слагаемые векторы путем их параллельного переноса последовательно пристраивать один за другим так, что начало последующего вектора совпадает с концом предыдущего, то вектор, замыкающий получившуюся ломаную, является суммой данных слагаемых, причем его начало совпадает с началом первого из слагаемых векторов, а конец — с концом последнего.

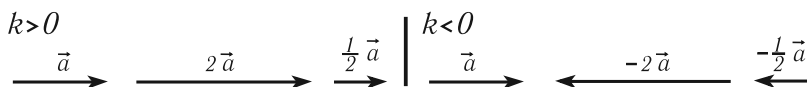
$$\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF}$$



Умножение вектора на число

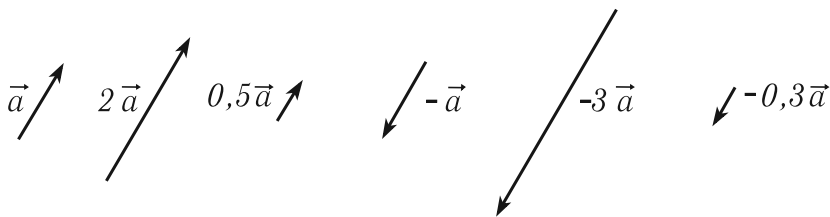
Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $k \cdot |\vec{a}|$, причем векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.

Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.



При умножении вектора \vec{a} на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины \vec{a} .

Он сонаправлен с вектором \vec{a} , если k больше нуля, и направлен противоположно \vec{a} , если k меньше нуля:



Свойства умножения вектора на число

Для любых векторов \vec{a} и \vec{b} и любых чисел k, m справедливы равенства:

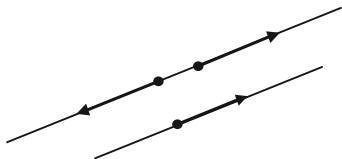
1. Сочетательный закон: $(k \cdot m) \cdot \vec{a} = k \cdot (m \cdot \vec{a})$.
2. Первый распределительный закон: $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$.
3. Второй распределительный закон: $(k + m) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a}$.

5.6.4. Коллинеарные векторы.

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы либо одинаково направлены, либо противоположно направлены.



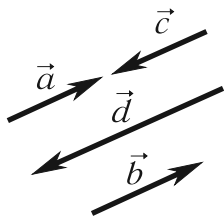
Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарные и их лучи сонаправлены, то векторы \vec{a} и \vec{b} называются **сонаправленными**.

Обозначаются $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Если векторы \vec{a} и \vec{d} коллинеарные, а их лучи не являются сонаправленными, то векторы \vec{a} и \vec{d} называются **противоположно направленными**.

Обозначаются $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{d}$.

Нулевой вектор условились считать сонаправленным с любым вектором.



$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \vec{c} \uparrow\uparrow \vec{d}, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{d}, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}, \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{d}, \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$$

Свойство коллинеарных векторов

Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует число k такое, что $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, причем если $k > 0$, то векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправленные, если $k < 0$, то противоположно направленные.

Любой вектор \vec{p} можно разложить, и притом единственным образом, по двум данным неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{p} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}.$$

5.6.5. Компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Любые два вектора компланарны. Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

Признак компланарности трех векторов

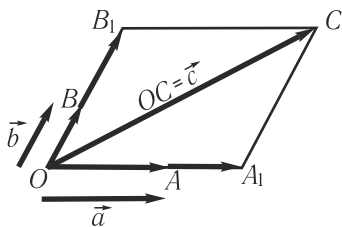
Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} , т.е. представить в виде $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, где x и y — некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

Отложим от произвольной точки O вектор \vec{OA} , равный вектору \vec{a} и вектор \vec{OB} , равный вектору \vec{b} ,

$$\vec{OA_1} = x \cdot \vec{OA} = x \cdot \vec{a};$$

$$\vec{OB_1} = y \cdot \vec{OB} = y \cdot \vec{b};$$

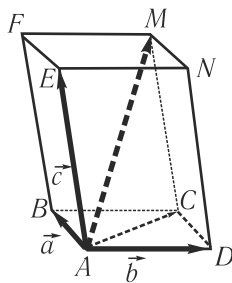
$$\vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}.$$



Правило параллелепипеда

Сумма трех некопланарных векторов равна вектору, изображаемому направленной диагональю параллелепипеда, построенному на этих векторах:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{AM}.$$



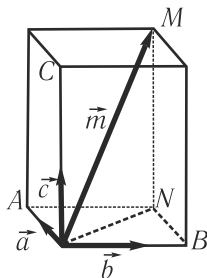
Разложение вектора по трем некопланарным векторам

Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Любой вектор \vec{m} может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации трех любых некопланарных векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} :

$$\vec{m} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}.$$

Числа x , y и z называются **координатами вектора \vec{m}** в данном базисе (векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} — базисные векторы). В этом случае пишут: $\vec{m} \{x, y, z\}$.



5.6.6. Координаты вектора; скалярное произведение векторов; угол между векторами

Пусть задана прямоугольная система координат в пространстве — три взаимно перпендикулярные прямые x , y , z , на которых выбраны направление и единица измерения отрезков, которые лежат в трех разных плоскостях xy , yz , xz и имеют общую точку пересечения O .

Оси координат — Ox , Oy , Oz (соответственно ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат) с выбранными на них направлениями.

Начало координат — точка их пересечения O .

Единичным вектором или **ортом** называется вектор, длина которого равна единице и который направлен вдоль какой-либо координатной оси.

Единичный вектор, направленный вдоль оси x , обозначается \vec{i} .

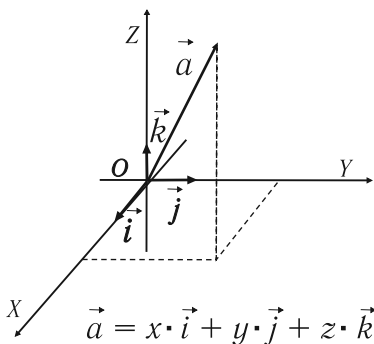
Единичный вектор, направленный вдоль оси y , обозначается \vec{j} .

Единичный вектор, направленный вдоль оси z , обозначается \vec{k} .

Координатные векторы — единичные векторы, направление которых совпадает с положительным направлением координатных осей.

Вектор \vec{i} совпадает по направлению с осью абсцисс, вектор \vec{j} совпадает по направлению с осью ординат, вектор \vec{k} — с осью аппликат.

Любой вектор \vec{a} можно разложить по координатным векторам: $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.



Координаты вектора \vec{c} в данной системе координат — коэффициенты разложения x , y и z , которые определяются единственным образом: $\vec{c} \{x, y, z\}$.

Свойства векторов, заданных координатами:

- координаты нулевого вектора равны нулю;
- координаты равных векторов соответственно равны;
- координаты вектора суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \quad \vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}, \quad \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}, \\ \vec{c} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\};$$

- координаты вектора разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}, \quad \vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}, \quad \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}, \\ \vec{c} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\};$$

- координаты вектора произведения данного вектора на число равны произведениям соответствующих координат этого вектора на данное число:

$$k\vec{a}, \quad k \neq 0, \\ k\vec{a} \{kx; ky; kz\};$$

- длину вектора \vec{a} , заданного своими координатами $\vec{a} \{x_1, y_1, z_1\}$, можно найти по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

- если точка A имеет координаты $A(x_1, y_1, z_1)$, точка B имеет координаты $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора \overline{AB} вычисляются по формуле:

$$\overline{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\};$$

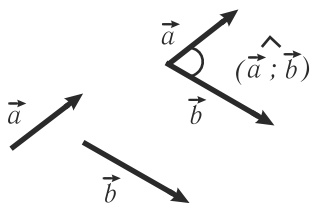
Угол между двумя векторами

Углом между двумя направлениями в пространстве называется величина наименьшего угла между любыми лучами этих направлений с общим началом.

Угол между лучами l_1 и l_2 обозначается: $(\widehat{l_1; l_2})$.

По определению угол между двумя направлениями находится в промежутке $[0^\circ; 180^\circ]$.

Углом между двумя ненулевыми векторами называется угол между направлениями этих векторов.



Скалярное произведение векторов

Векторы можно умножать не только на числа, но и друг на друга.

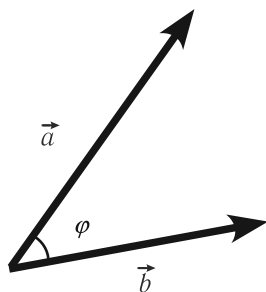
Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Перемножили два вектора, а получился скаляр, то есть число.

Например, в физике механическая работа равна скалярному произведению двух векторов — силы и перемещения:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi.$$



Непосредственно из определения следуют следующие простейшие свойства:

1. Скалярное произведение произвольного вектора \vec{a} на себя (*скалярный квадрат вектора*) всегда неотрицательно и равно квадрату длины этого вектора. Причем скалярный квадрат вектора равен нулю тогда и только тогда, когда данный вектор — нулевой:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

2. Скалярное произведение любых перпендикулярных векторов \vec{a} и \vec{b} равно нулю:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

3. Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они перпендикулярны или хотя бы один из них — нулевой.
4. Скалярное произведение двух векторов положительно тогда и только тогда, когда между ними острый угол.
5. Скалярное произведение двух векторов отрицательно тогда и только тогда, когда между ними тупой угол.

Скалярное произведение векторов в координатах

Если векторы \vec{a} и \vec{b} заданы своими координатами:

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}, \quad \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\},$$

то их **скалярное произведение может быть вычислено по формуле:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Угол φ между векторами \vec{a} и \vec{b} , заданными своими координатами $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$, можно найти по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

6.1. Элементы комбинаторики

6.1.1. Поочередный и одновременный выбор

При решении комбинаторных задач используются следующие рассуждения:

- перебор возможных вариантов;
- дерево возможных вариантов;
- комбинаторное правило умножения;
- комбинаторное правило сложения.

Перебор возможных вариантов

Пример № 1. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 4 и 7?

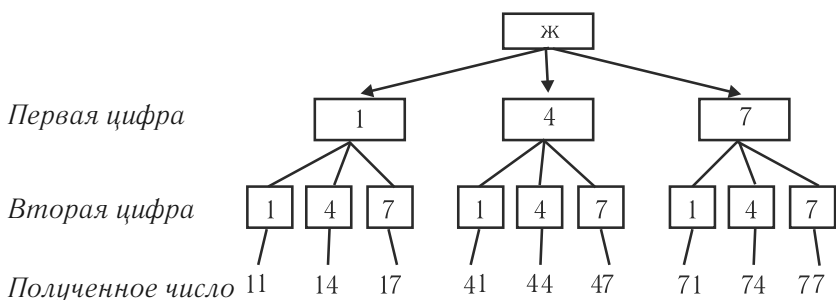
Решение: заметим, что в условии задачи не сказано, что цифры не могут повторяться. Для того чтобы не пропустить и не повторить ни одно из чисел, будем выписывать их в порядке возрастания. Сначала запишем числа, начинающиеся с цифры 1 (11; 14; 17); затем с цифры 4 (41; 44; 47) и, наконец, с цифры 7 (71; 74; 77). Таким образом, из трех данных цифр можно составить всего 9 различных двузначных чисел.

Ответ: 9.

Дерево возможных вариантов

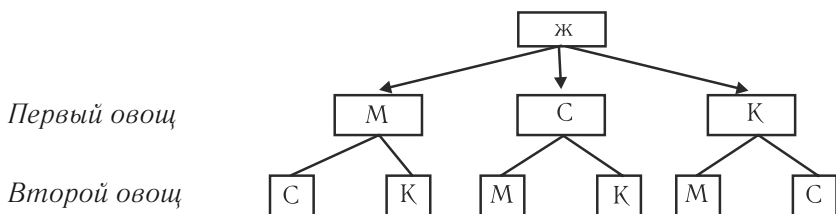
Существует единый подход к решению самых разных комбинаторных задач с помощью составления специальных схем. Внешне такая схема напоминает дерево, отсюда название — **дерево возможных вариантов**. При правильном построении дерева ни один из возможных вариантов решения не будет потерян.

Построим такую схему для решения нашей задачи.



Эта схема действительно похожа на дерево, правда, «вверх ногами» и без ствола.

Пример № 2. Служитель зоопарка должен дать зайцу два различных овоща. Сколькими различными способами он может это сделать, если у него есть морковь, свекла и капуста?



В итоге получаем 6 вариантов при учете, что мы делаем различие между $МС$ и $СМ$ и другими аналогичными парами. Но зайцу неважно, в каком порядке он получит овощи (сначала морковь, потом свеклу или наоборот), получаем, что различных вариантов только три.

Ответ: 3.

Комбинаторное правило умножения

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B , следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B .

Пример № 3. Из пункта A в пункт B ведут 3 дороги, а из пункта B в пункт C — 4 дороги. Сколькими способами можно совершить поездку из A в C через B ?

Решение: в пункте А есть 3 способа выбора дороги в пункт В, а в пункте В есть 4 способа попасть в пункт С. Согласно принципу умножения, существует $3 \cdot 4 = 12$ способов попасть из пункта А в пункт С.

Ответ: 12.

Пример № 4. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, 8 и 9, если: а) цифры не повторяются; б) повторение допустимо; в) числа должны быть нечетные и без повторения.

Решение: а) первую цифру можно выбирать пятью способами. Так как в числе цифры не повторяются, то вторую цифру уже можно выбрать из четырех оставшихся четырьмя способами. Далее получаем, что третью цифру можно выбрать тремя способами и четвертую — двумя. Таким образом, число возможных четырехзначных чисел равно $N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$;

б) так как повторения допустимы, то каждую цифру можно выбирать каждый раз из 5 имеющихся цифр. Тогда число возможных чисел равно $N = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$;

в) у нечетного числа последняя цифра нечетная, т.е. в данном случае может быть одной из трех: 5, или 7, или 9. Поэтому на последнее место можно поставить любую из этих трех чисел. Помним о том, что никакие из пяти цифр нельзя использовать более одного раза. Таким образом, $N = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$.

Ответ: а) 120; б) 625; в) 72.

Пример № 5. Из двух полуфинальных групп, каждая из которых содержит по 6 команд, в финал выходит по одной команде. Сколько может быть различных вариантов участников финального матча?

Решение: так как в финал может выйти любая из 6 команд первой полуфинальной группы и любая из 6 команд второй полуфинальной группы, то количество вариантов $6 \cdot 6 = 36$.

Ответ: 36.

Комбинаторное правило сложения

Если элемент А можно выбрать из некоторого множества m способами, а другой элемент В — n способами, причем выбо-

ры А и В таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть выбраны одновременно, то выбор какого-либо одного из этих элементов (либо А, либо В) можно осуществить $(m+n)$ способами.

Пример № 6. Пусть из города А в город В можно добраться одним авиамаршрутом, двумя железнодорожными маршрутами и тремя автобусными маршрутами. Сколькими способами можно добраться из города А в город В?

Решение: так как дорога из города А в город В выбирается только одним из перечисленных маршрутов, поскольку они взаимно исключают друг друга, то задача решается только правилом сложения: $1+2+3=6$ способов.

Ответ: 6.

Пример № 7. Катя пришла в кондитерский магазин, чтобы выбрать сладости к чаю. На прилавке она увидела 8 видов тортов и 7 видов пирожных. Катя решила купить либо торт, либо пирожное. Сколько способов выбора сладостей есть у Кати? Если девочка решит купить и торт, и пирожное, то сколькими способами она может сделать свой выбор?

Решение: один торт можно выбрать восемью способами, а пирожное — другими семью способами. Тогда торт или пирожное Катя может купить $8+7=15$ способами.

Во втором случае один торт можно выбрать восемью способами, затем пирожное можно выбрать семью способами. Следовательно, воспользуемся правилом умножения — купить и торт, и пирожное Катя может $8 \cdot 7=56$ способами.

Ответ: 15 способов; 56 способов.

Обычно правило сложения применяется в тех случаях, когда в задачах встречаются союзы «или», «либо, либо» (торт или пирожное), а правило умножения — в задачах, содержащих союз «и» (торт и пирожное).

Рассмотрим задачу, в которой применяются оба правила комбинаторики: правило умножения и правило сложения.

Пример № 8. В тарелке лежат 12 пирожков и 10 конфет. Саша выбирает либо пирожок, либо конфету, после чего Катя

выбирает из оставшихся сладостей и пирожок, и конфету. Сколько возможно таких выборов?

Решение: Саша может выбрать пирожок 12 способами, конфету — 10 способами. Если Саша выбирает пирожок, то Катя может выбрать пирожок 11 способами, а конфету — 10 способами. Если Саша выбирает конфету, то Катя может выбрать пирожок 12 способами, а конфету — 9 способами. Таким образом, Саша и Катя могут сделать свой выбор $12 \cdot 11 \cdot 10 + 10 \cdot 12 \cdot 9 = 2400$ способами.

Ответ: 2400.

6.1.2. Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона

Перестановки

Возьмем n различных элементов: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Будем переставлять их всеми возможными способами, сохраняя их количество и меняя лишь порядок их расположения. Каждая из полученных таким образом комбинаций называется *перестановкой*. Общее количество *перестановок из n элементов* обозначается P_n . Это число равно произведению всех целых чисел от 1 до n : $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$

Символ $n!$ (называется факториал) — сокращенная запись произведения: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Пример № 1. Найти число перестановок из трех элементов: 1, 2, 3.

Решение: воспользуемся формулой: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

В результате получим 6 перестановок: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Ответ: 6.

Пример № 2. Света, Люда и Женя договорились в течение трех дней по очереди поливать цветы в классе. Сколько у них есть способов установить порядок дежурства?

Решение: первой поливать цветы может пойти любая из трех девочек. Тогда во второй день может пойти одна из двух оставшихся девочек, а в третий день третья девочка. Значит, имеется $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ способов по установлению порядка дежурства.

Ответ: 6 способов.

Пример № 3. Сколькими способами могут разместиться 5 покупателей в очереди в кассу?

Решение: воспользуемся формулой $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ: 120.

Пример № 4. Анаграмма — это «слово», полученное из данного слова перестановкой его букв (но не обязательно имеющее смысл). Сколько существует различных анаграмм слова «график»?

Решение: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Ответ: 720.

Размещения

Будем составлять группы из m различных элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов, располагая эти m взятых элементов в различном порядке. Полученные комбинации называются размещениями из n элементов по m . Их общее количество обозначается A_n^m и равно произведению:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(m-1)].$$

Пример № 5. Найти число размещений из четырех элементов a, b, c, d по два.

Решение: воспользуемся формулой и получим: $A_n^m = 4 \cdot 3 = 12$.

Вот эти размещения: $ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc$.

Ответ: 12.

Пример № 6. В некотором конкурсе принимают участие 10 человек. Сколькими способами могут быть присуждены 1-я, 2-я и 3-я премии победителям?

Решение: $A_{10}^3 = 10 \cdot (10-1) \cdot (10-2) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Ответ: 720.

Пример № 7. Ученику необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами может быть составлено расписание его экзаменов?

Решение: $A_8^4 = 8 \cdot (8-1) \cdot (8-2) \cdot (8-3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Ответ: 1680.

Сочетания

Будем составлять группы из m различных элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов, не принимая во внимание порядок расположения этих m элементов. Тогда мы получим сочетания из n элементов по m . Их общее количество обозначается C_n^m и может быть вычислено по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Из этой формулы делаем вывод, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Заметим, что можно составить только *одно сочетание из n элементов по n , которое содержит все n элементов*. Формула числа сочетаний дает это значение, если только принять, что $0! = 1$, что является определением 0!

В соответствии с этим определением получим: $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Общее число сочетаний можно вычислить, пользуясь и другим выражением:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Пример № 8. Найти число сочетаний из пяти элементов: $a, б, в, г, д$ по три.

Решение: $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$.

Эти сочетания: $абв, абг, абд, авг, авд, агд, бвг, бвд, бгд, вгд$.
Ответ: 10.

Пример № 9. Сколькими способами можно выбрать 6 разных пирожных в кондитерской, где есть 11 разных сортов пирожных?

Решение: $C_{11}^6 = \frac{11!}{6! \cdot (11-6)!} = 462$.

Ответ: 462.

Пример № 10. Ученикам дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

Решение: $C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} = 210$.

Ответ: 210.

Бином Ньютона

Это формула, представляющая выражение $(a+b)^n$ при положительном целом n в виде многочлена:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 \cdot a^{(n-1)} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + C_n^3 \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + C_n^{(n-1)} \cdot a^1 \cdot b^{(n-1)} + b^n.$$

Сумма показателей степеней для a и b постоянна и равна n . Числа $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^{n-1}$ называются *биномиальными коэффициентами*.

Пример. Воспользуемся формулой бинома Ньютона для раскрытия куба суммы двух чисел:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + C_3^1 \cdot a^{3-1} \cdot b^1 + C_3^2 \cdot a^{3-2} \cdot b^2 + C_3^3 \cdot a^{3-3} \cdot b^3 = \\&= a^3 + \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot a^2 \cdot b + \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot a^1 \cdot b^2 + \frac{3!}{1! \cdot 3!} \cdot b^3 = \\&= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3.\end{aligned}$$

6.2. Элементы статистики

6.2.1. Табличное и графическое представление данных

Всякое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе. Этот этап называется этапом *статистического наблюдения*.

Обобщенные и систематизированные статистические данные должны быть представлены так, чтобы ими можно было пользоваться. Существует 3 основных *формы представления статистических данных*:

- 1) текстовая — включение данных в текст;
- 2) табличная — представление данных в таблицах;
- 3) графическая — выражение данных в виде графиков.

Текстовая форма применяется при малом количестве цифровых данных.

Табличная форма применяется чаще всего, так как является более эффективной формой представления статистических данных. В отличие от математических таблиц, которые по начальным условиям позволяют получить тот или иной результат, статистические таблицы рассказывают языком цифр об изучаемых объектах.

Статистическая таблица — это система строк и столбцов, в которых в определенной последовательности и связи излагается статистическая информация о социально-экономических явлениях.

Для обобщения и систематизации данных, полученных в результате статистического наблюдения, их по какому-либо признаку разбивают на группы и группировки сводят в таблицы.

Пример № 1. Администрация школы решила проверить математическую подготовку семиклассников. С этой целью был составлен тест, содержащий 9 заданий. Работу выполняли 20 учащихся школы. При проверке каждой работы учитель отмечал число верно выполненных заданий. В результате был составлен такой ряд чисел:

6, 5, 4, 0, 4, 5, 7, 9, 8, 2, 3, 5, 4, 7, 8, 9, 4, 4, 3, 8.

Для того чтобы удобно было анализировать полученные данные, упорядочим этот ряд:

0, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5,
6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9.

Представим полученные данные в виде таблицы.

| | | | | | | | | | | |
|---------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число верно выполненных заданий | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Частота | 1 | 0 | 1 | 2 | 5 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 |

Такую таблицу называют *таблицей частот*.

Сумма частот равна общему числу проверяемых работ, то есть 20.

Иногда составляют таблицу, в которой для каждого данного числа указывается не частота, а отношение частоты к общему числу данных в ряду. Это отношение, выраженное в процентах, называют *относительной частотой*, а саму таблицу — *таблицей относительных частот*.

| | | | | | | | | | | |
|------------------------------------|---|---|---|----|----|----|---|----|----|----|
| Число верно выполненных заданий | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Относительная частота, % | 5 | 0 | 5 | 10 | 25 | 15 | 5 | 10 | 15 | 10 |

Сумма относительных частот составляет 100%.

Вообще, если по результатам исследования составлена таблица относительных частот, то сумма относительных частот равна 100%.

Иногда статистические таблицы дополняются графиками, когда ставится цель подчеркнуть какую-то особенность данных, провести их сравнение.

Графическая форма является самой эффективной формой представления данных с точки зрения их восприятия. С помощью графиков достигается наглядность характеристики структуры, динамики, взаимосвязи явлений, их сравнения.

Статистические графики — это условные изображения числовых величин и их соотношений. Графическая форма облегчает рассмотрение статистических данных, делает их наглядными, выразительными, обозримыми.

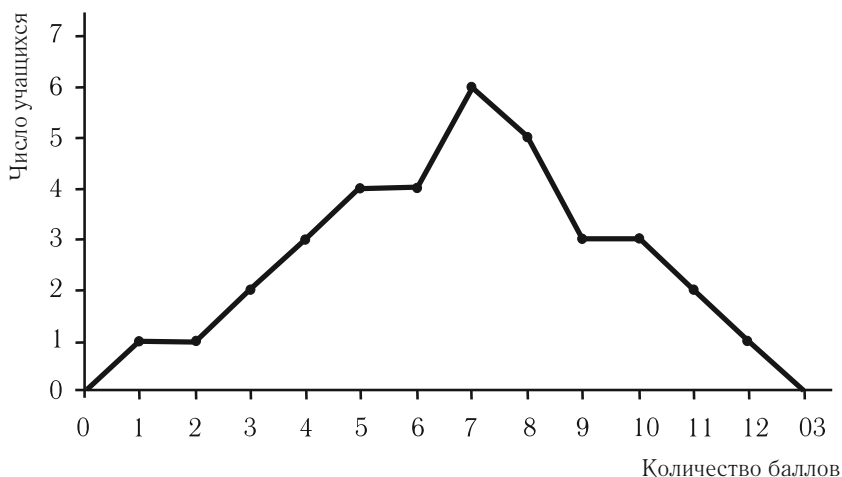
Анализ данных распределения наглядно можно представить в виде графического изображения через **полигон, гистограмму, столбчатую или круговую диаграмму**.

Полигон

Пример № 2. Дана таблица, в которой представлены успехи учащихся некоторого класса. Построить полигон частот.

| | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| Количество баллов, x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Число учащихся, n | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 6 | 5 | 3 | 3 | 2 | 1 |

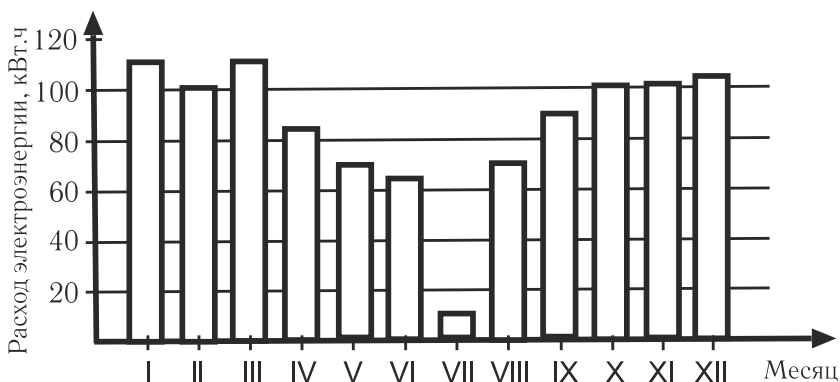
Решение: по горизонтали отмечаем баллы, набранные учащимися, по вертикали — соответствующее количество учеников. Полученные точки соединяем отрезками. Полигон частот изображен на рисунке.



Столбчатая диаграмма

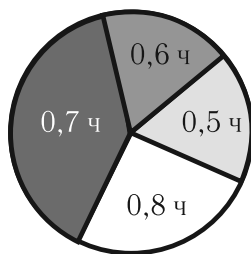
Пример № 3. В таблице показан расход электроэнергии (с точностью до 5 кВт·ч) некоторой семьей в течение года:

| Месяц | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|------------------------------|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| Расход электроэнергии, кВт·ч | 110 | 100 | 110 | 85 | 70 | 65 | 10 | 70 | 90 | 100 | 100 | 105 |



Круговая диаграмма

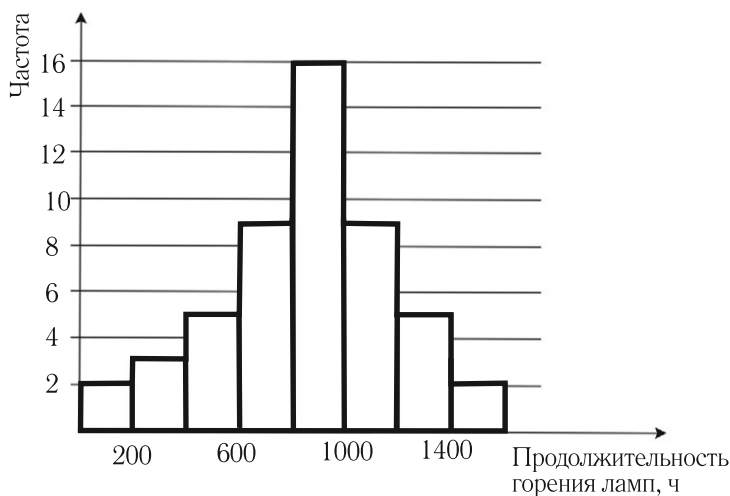
Диаграмма, иллюстрирующая распределение рабочих цеха по времени, которое они затратили на изготовление одной детали.



Гистограмма

Пример № 4. В таблице показана продолжительность горения лампочек дневного освещения (производители разные):

| | | | | | | | | |
|---------------------------------------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|
| Продолжительность горения лампочек, ч | 200 | 400 | 600 | 800 | 1000 | 1200 | 1400 | 1600 |
| Частота | 1 | 3 | 5 | 9 | 16 | 9 | 5 | 2 |



6.2.2. Числовые характеристики рядов данных

Теория вероятностей — раздел математики, который изучает количественные оценки случайных событий для прогнозирования процессов и явлений в будущем. Основой таких прогнозов являются числовые данные, накопленные в результате наблюдений в

реальной жизни. Сбором, изучением и обработкой этих данных занимается наука, основанная на законах теории вероятностей, — статистика.

Среднее арифметическое (или выборочное среднее) ряда чисел — это частное от деления суммы этих чисел на их количество.

Например, ученик получил по литературе следующие отметки: 4, 2, 3, 5. Найдем среднее арифметическое этого ряда: $(4+2+3+5) : 4 = 3,5$.

Мода — число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто. В отличие от среднего арифметического, которое можно вычислить для любого числового ряда, моды может вообще не быть. Рассмотрим предыдущий пример. Каждая отметка встречается в данном ряду только один раз, и среди них нет числа, встречающегося чаще других. Значит, у этого ряда нет моды.

Медиана числового ряда. Пример: имеется следующий ряд чисел: 15,3; 16,9; 21,8; 18,4; 16,1; 25,1; 19,9; 15,5; 14,7; 20,2; 15,4.

Для того чтобы найти медиану ряда чисел, нужно сначала их упорядочить — составить ранжированный ряд (расставить числа в порядке возрастания). В нашем примере он выглядит так: 14,7; 15,3; 15,4; 15,5; 16,1; **16,9**; 18,4; 19,9; 20,2; 21,8; 25,1. Средним (шестым по счету) числом является 16,9: пять чисел меньше него, пять чисел больше. Значит, 16,9 — медиана. **Медианой** ряда, состоящего из **нечетного** количества чисел, называется число данного ряда, которое окажется посередине, если этот ряд упорядочить. **Медианой** ряда, состоящего из **четного** количества чисел, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине чисел этого ряда, если этот ряд упорядочить.

Размах измерения — это разность между максимальным и минимальным вариантами.

Статистические данные могут быть представлены разными способами — например, может быть **дана не сама выборка, а таблица частот**. Как в этом случае найти среднее арифметическое, моду и медиану? Можно восстановить по таблице саму выборку (точнее, ранжированный ряд) и «свести задачу к предыдущей». Но есть более рациональный способ вычислений.

Пример № 1. Семиклассник в октябре получил следующие оценки по математике: 5, 2, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 5, 5. Представим эти данные в виде таблицы частот:

| Отметка | Абсолютная частота | Относительная частота | Накопленная частота |
|---------|--------------------|-----------------------|---------------------|
| 2 | 1 | 0,1 | 0,1 |
| 4 | 3 | 0,3 | 0,4 |
| 5 | 6 | 0,6 | 1 |
| ИТОГО | 10 | 1 | |

Вспомним правило для вычисления *среднего арифметического*: надо сложить все числа ряда и поделить полученную сумму на их количество. В результате имеем 4,4. Но если мы знаем, сколько раз повторяется в выборке каждое значение (т. е. знаем его абсолютную частоту), то вместо многократного сложения одного и того же числа можно умножить его на абсолютную частоту. Получим формулу для вычисления среднего арифметического с использованием абсолютных частот значений ряда:

$$\frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6}{10} = 4,4.$$

Что касается *моды* и *медианы*, то их вычисление по таблице частот происходит еще проще. Для вычисления *моды* необходимо найти максимальное значение в столбце абсолютных или относительных частот и выбрать соответствующее ему значение числового ряда. В рассматриваемом примере максимальная частота равна 6, значит, *модой* выборки будет 5. Если максимальных частот в таблице несколько, то выборка не имеет моды.

Для вычисления *медианы* находим первое значение накопленной частоты, превосходящее 0,5, и выбираем соответствующее ему значение числового ряда. В нашем случае накопленная частота впервые превосходит 0,5 только в последней строке таблицы, значит, *медианой* выборки будет 5.

Вычислим *размах измерения*: $5 - 2 = 3$.

6.3. Элементы теории вероятностей

6.3.1. Вероятности событий

Статистический эксперимент (опыт) — наблюдение за объектами или явлениями в строго определенных условиях и измерение определенных признаков объекта. Может быть повторен в практически неизменных условиях неограниченное количество раз.

Появление исхода, обладающего заранее указанным свойством, называется событием. События обозначаются буквами A, B, C, D, \dots

Классы событий: достоверные, случайные, невозможные.

Достоверные события происходят при каждом проведении опыта, например, тело с высоты всегда падает вниз, Солнце всходит на востоке, водопад течет вниз и так далее.

Событие, которое может произойти или не произойти при проведении опыта, называется *случайным событием*. Случайные события происходят в определенных условиях, но при каждом проведении опыта: одни происходят чаще, другие реже. Например, бутерброд чаще всего падает маслом вниз и т. п.

Невозможное событие — событие, которое не может произойти ни при каком исходе опыта. Например, в 2014 году в феврале будет 30 дней.

Вероятностью P наступления случайного события A называется отношение $\frac{m}{n}$, где n — число всех возможных исходов эксперимента, а m — число всех благоприятных исходов: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Свойства вероятности

1. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(A)=0$.
2. Вероятность достоверного события равна единице: $P(A)=1$.
3. Вероятность случайного события не меньше нуля, но и не больше единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$.

События, которые имеют равные возможности произойти, называются *равновозможными*.

Суммой событий $A+B$ называется событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий A или B (неважно, какого именно, или, если это возможно, обоих событий).

События A и B называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно при одном и том же испытании. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Два случайных события называются *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Если одно из этих событий обозначить A , то другое (противоположное) обозначают \bar{A} (читается «не A »). Событие \bar{A} означает, что событие A не произошло: $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Произведением двух событий AB называется событие, состоящее в том, что оба события произошли одновременно. Если появление каждого из событий не зависит от того, произошло или нет другое, то события называются *независимыми*, и вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$.

Если вероятность появления события B изменяется в зависимости от того, произошло или нет событие A , то такие события называются *зависимыми*. Вероятность события B при условии, что событие A уже произошло, обозначается $P_A(B)$. Вероятность произведения зависимых событий определяется формулой $P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)$.

Если события A и B несовместные, то $P(AB)=0$.

Формула для вычисления вероятности суммы двух событий, все равно каких, совместных или нет, имеет вид:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Пример № 1. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово РЫБКА. Ребенок, который не умеет читать, рассыпал эти буквы и затем выложил три из них в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него получилось слово РАК. (Предполагается, что ребенок не переворачивает буквы.)

Решение: пусть случайное событие A состоит в том, что получено слово РАК. Число равновозможных элементар-

ных исходов равно числу размещений из 5 элементов по 3:

$$n = A_4^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$$

Поскольку все буквы в первоначальном слове разные, то среди 60 исходов не будет двух одинаковых, то есть слово РАК встретится только один раз: $m = 1$, $P(A) = \frac{1}{60}$.

Ответ: $\frac{1}{60}$.

Пример № 2. В двух ящиках содержатся синие и красные шары: в первом ящике 6 синих и 7 красных, во втором ящике — 4 синих и 5 красных. Из каждого ящика извлекают по одному шару. Найти: 1) вероятность того, что хотя бы один из вынутых шаров будет красным; 2) вероятность того, что только один из шаров будет красным.

Решение:

1) пусть событие A состоит в том, что хотя бы один из вынутых шаров красный. Обозначим за A_1 и A_2 события, состоящие в извлечении красного шара из первого и из второго ящиков соответственно. Тогда событие A находим как сумму событий A_1 и A_2 , то есть $A = A_1 + A_2$, а вероятность этого события вычислим по правилу нахождения вероятности суммы двух событий

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

События A_1 и A_2 — независимые, поэтому

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Вычислим вероятности событий. В первом ящике находится 13 шаров, из них 7 — красные, следовательно $P(A_1) = \frac{7}{13}$. Во втором ящике находится 9 шаров, из них 5 — красные, то есть

$$P(A_2) = \frac{5}{9}. \quad P(A) = \frac{7}{13} + \frac{5}{9} - \frac{7}{13} \cdot \frac{5}{9} = \frac{31}{39}.$$

2) пусть событие B состоит в том, что только один из вынутых шаров оказался красным $B = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$.

События $A_1 \cdot \overline{A_2}$ и $\overline{A_1} \cdot A_2$ несовместные, поэтому

$$P(B) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2).$$

Таким образом, вероятность того, что только один из шаров будет красным, равна $P(B) = \frac{7}{13} \cdot \frac{4}{9} + \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{9} = \frac{58}{117}$.

Ответ: $\frac{31}{39}; \frac{58}{117}$.

6.3.2. Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач

Как используются теория вероятностей и математическая статистика? Эти дисциплины — основа вероятностно-статистических методов принятия решений. Чтобы воспользоваться их математическим аппаратом, необходимо задачи принятия решений выразить в терминах вероятностно-статистических моделей. Применение конкретного вероятностно-статистического метода принятия решений состоит из трех этапов:

- переход от реальности к абстрактной математико-статистической схеме, т.е. построение вероятностной модели;
- проведение расчетов и получение выводов чисто математическими средствами в рамках вероятностной модели;
- интерпретация математико-статистических выводов применительно к реальной ситуации и принятие соответствующего решения.

Пример № 1. Пассажир ждет автобус № 3 или № 13 возле остановки, на которой останавливаются автобусы № 3, № 5, № 13 и № 24. Считая, что автобусы всех маршрутов появляются случайным образом (то есть не по расписанию) одинаково часто, найдите вероятность того, что первый подошедший к остановке автобус будет нужного пассажиру маршрута.

Решение: так как общее количество автобусов 4, из них нужных пассажиру 2, то вероятность того, что первым к остановке подойдет нужный автобус, равна $\frac{2}{4}$, то есть $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример № 2. Пусть некоторый стрелок попадает в область первой мишени с вероятностью попадания, равной 0,25, а вероятность попадания в область второй мишени равна 0,15. Какова вероятность того, что стрелок попадет в одну из мишеней?

Решение: по правилу сложения вероятностей получаем, что искомая вероятность $P=0,25+0,15=0,4$.

Ответ: 0,4.

Пример № 3. Таня забыла последнюю цифру номера телефона знакомой девочки и набрала ее наугад. Какова вероятность того, что Таня попала к своей знакомой?

Решение: на последнем месте в номере телефона может стоять одна из 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то есть $n=10$. Из $n=10$ только одна цифра верна, поэтому $m=1$. Выпадение любой цифры равновероятно, поэтому $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{10}$.

Ответ: 0,1.

Пример № 4. В денежно-вещевой лотерее на 100 000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность:

- 1) вещевого выигрыша;
- 2) денежного выигрыша;
- 3) какого-либо выигрыша?

Решение: приобретение любого билета равновозможно.

1. Событие A — «на билет выпал вещевой выигрыш»:

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{1200}{100000}=0,012.$$

2. Событие B — «на билет выпал денежный выигрыш»:

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{800}{100000}=0,008.$$

3. Событие C — «на билет выпал какой-либо выигрыш»:

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{1200+800}{100000}=\frac{2000}{100000}=0,02.$$

Ответ: 1) 0,012; 2) 0,008; 3) 0,02.

Пример № 5. Для экзамена подготовили билеты с номером от 1 до 25. Какова вероятность того, что взятый наугад учеником билет имеет:

- 1) однозначный номер;
- 2) двузначный номер?

Решение: общее количество билетов $n=25$; извлечение каждого из них считаем равновероятным.

1. Рассмотрим событие A — «взятый билет имеет однозначный номер». Количество благоприятствующих исходов $m_A=9$ (одна цифра от 1 до 9).

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{9}{25}.$$

2. Рассмотрим событие B — «взятый билет имеет двузначный номер». Количество благоприятствующих исходов $m_B=16$ (первая цифра 1 или 2; вторая цифра от 0 до 9 после единицы, от 0 до 5 после двойки; всего $10+6=16$).

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{16}{25}.$$

Ответ: 1) $\frac{9}{25}$; 2) $\frac{16}{25}$.

Пример № 6. Вы находитесь в круглом зале с 10 дверьми, из которых какие-то 4 закрыты. Вы случайным образом выбираете 3 двери. Найдите вероятность того, что:

- 1) вы не сможете выйти из зала;
- 2) вы можете выйти из зала, но вернуться в зал уже не сможете;
- 3) вы можете выйти через одну дверь, а вернуться через другую;
- 4) хотя бы через одну дверь вы сможете выйти из зала.

Решение: исходы — это все возможные наборы по 3 двери из имеющихся. Порядок дверей в наборе значения не имеет. Чтобы найти общее число исходов, воспользуемся формулой сочетаний:

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7!} = 120.$$

Все исходы являются равновероятными.

Найдем вероятность событий.

1. Рассмотрим событие A — «вы не сможете выйти из зала». Это означает, что все выбранные двери закрыты.

$$m_A=4. \quad P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

2. Рассмотрим событие B — «вы можете выйти из зала, но вернуться в зал уже не сможете». Это означает, что одна выбранная дверь не заперта, а две другие — заперты.

$$m_B = C_6^1 \cdot C_4^2 = 6 \cdot 6 = 36.$$

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

3. Рассмотрим событие C — «вы можете выйти через одну дверь, а вернуться через другую». Это означает, что либо все 3 выбранных двери не заперты, либо 2 не заперты, а одна заперта.

$$m_C = C_6^3 + C_6^2 \cdot C_4^1 = 20 + 15 \cdot 4 = 80.$$

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}.$$

4. Рассмотрим событие D — «хотя бы через одну дверь вы сможете выйти из зала». Это означает, что открыта либо 1, либо 2, либо 3 двери из 3 выбранных. Так как события A и D являются противоположными событиями, то

$$m_D = n - m_A = 120 - 4 = 116.$$

$$P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}.$$

Ответ: 1) $\frac{1}{30}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{29}{30}$.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

АЛГЕБРА

Степень с натуральным показателем и ее свойства

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ множителей}}$$

Число a называется основанием степени, а число n — показателем степени.

Свойства степеней с натуральным показателем:

$$a^1 = a$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}, n > m$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n, b \neq 0$$

Арифметические действия с обыкновенными дробями

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad-cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Проценты

Одна сотая часть любой величины или числа называется процентом.

$$0,01 = 1\%$$

Чтобы найти **проценты от числа**, нужно проценты представить в виде десятичной дроби и число умножить на полученную десятичную дробь.

Чтобы найти **число по его процентам**, нужно проценты представить в виде десятичной дроби и данное число разделить на полученную десятичную дробь.

Чтобы найти, **сколько процентов одно число составляет от другого**, нужно одно число разделить на другое и полученное произведение умножить на 100%.

Арифметический квадратный корень и его свойства

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a , то есть

$$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0.$$

Свойства арифметического квадратного корня:

$$\begin{array}{ll} 1. \sqrt{a} \geq 0, a \geq 0 & 3. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0 \\ 2. \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0 & \end{array}$$

Степень с рациональным показателем и ее свойства

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, a > 0 \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0$$

Свойства степени с действительным показателем

Для любых действительных x, y и положительных a и b имеют место следующие равенства:

$$\begin{array}{ll} a^x > 0 & (a^x)^y = a^{xy} \\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} & (ab)^x = a^x \cdot b^x \\ a^x \cdot a^y = a^{x+y} & \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \\ a^x : a^y = a^{x-y} & \end{array}$$

Логарифмы

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить b .

Обозначение: $\log_a b$.

Логарифм произведения

Если $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$, то логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Логарифм частного

Если $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$, то логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Заметим, что если $b < 0, c < 0$, то

$$\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|.$$

Логарифм степени

Если $a > 0, a \neq 1, b > 0$, то логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$\log_a b^k = k \log_a b.$$

Заметим, что если $k = 2p$, то $\log_a b^{2p} = 2p \log_a |b|$.

Логарифм корня

Если $a > 0, a \neq 1, b > 0, m$ — натуральное число, то логарифм корня равен частному от деления логарифма подкоренного числа на показатель корня:

$$\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{\log_a b}{m}.$$

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10. Обозначение $\lg b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e : $\log_e b = \ln b$, где $b > 0$.

Основные свойства логарифмов

($a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$):

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{\log_a b}{m}$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_{a^m} b^k = \frac{k}{m} \log_a b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad b \neq 1$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Модуль числа

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа x называется неотрицательное число $|x|$, определяемое соотношением

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Свойства модуля:

$$|a| \geq 0$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a| \geq a$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

$$|-a| = |a|$$

$$|a|^2 = a^2$$

Неравенства
 $|x| \leq a$ и $-a \leq x \leq a$
равносильны.

Уравнения

Решением, или **корнем**, уравнения называется такое значение неизвестного x , при подстановке которого в обе части уравнения получается истинное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Квадратное уравнение — это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — заданные числа, а x — неизвестная величина, $a \neq 0$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом и обозначают буквой D .

$$D = b^2 - 4ac$$

1. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.
2. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственный корень, который находится по формуле $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, которые находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Формулу $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ называют формулой корней квадратного уравнения общего вида.

Эту формулу можно записать в виде: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется приведенным. В этом уравнении старший коэффициент равен единице.

Теорема Виета для приведенного квадратного уравнения

Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то справедливы формулы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Рациональным уравнением называется такое уравнение, у которого выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, составлены лишь с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с дискриминантом $D \geq 0$ можно разложить на множители по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются **иррациональными**.

Уравнение, которое содержит неизвестное в показателе степени, называется **показательным** уравнением.

Логарифмическое уравнение — это такое уравнение, в котором неизвестная величина стоит под знаком логарифма.

Два уравнения называются равносильными (эквивалентными), если множества их решений (корней) совпадают, то есть это такие уравнения, которые имеют одни и те же корни.

Несколько уравнений с двумя (или более) переменными образуют **систему уравнений**, если ставится задача найти множество решений этих уравнений.

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

Система уравнений называется **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется **определенной**, если она имеет конечное число решений.

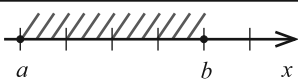

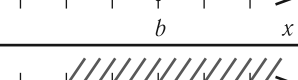
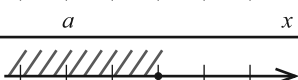
Система уравнений называется **неопределенной**, если она имеет бесконечное число решений.

Система уравнений называется **линейной**, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными.

Две системы уравнений называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений (в том числе, если системы не имеют решений, то они равносильны).

Неравенства

Таблица числовых промежутков

| Обозначение | Название число- вого промежутка | Аналитическая модель | Геометрическая модель |
|----------------|------------------------------------|-------------------------|---|
| $[a;b]$ | отрезок | $a \leq x \leq b$ |  |
| $(a;b)$ | интервал | $a < x < b$ |  |
| $(a;b]$ | полуинтервал | $a < x \leq b$ |  |
| $[a;b)$ | полуинтервал | $a \leq x < b$ |  |
| $[a; +\infty)$ | луч | $x \geq a$ |  |
| $(-\infty; b]$ | луч | $x \leq b$ |  |
| $(a; +\infty)$ | открытый луч | $x > a$ |  |
| $(-\infty; b)$ | открытый луч | $x < b$ |  |

Неравенство, содержащее одну переменную, называется **неравенством с одной переменной** (неизвестной).

Решением неравенства называется такое значение переменной, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Основные свойства неравенств

1. Если $a > b$, то $b < a$.
2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).
3. Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство, то есть если $a > b$, то $a + c > b + c$.
4. Если из одной части верного неравенства перенести в другую какое-либо слагаемое, изменив его знак на противоположный, то получится верное неравенство. Например, если $a + b > c$, то $a > c - b$ или $a - c > -b$.
5. Если обе части верного неравенства умножить (или разделить) на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство.
6. Если обе части верного неравенства умножить (или разделить) на одно и то же отрицательное число и *изменить знак неравенства на противоположный*, то получится верное неравенство.

Линейным неравенством с одной переменной называется неравенство вида $ax > b$ ($ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$), где a и b — числа, x — переменная.

Решение неравенств первой степени представлено в следующей таблице

| | $ax > b$ | $ax \geq b$ | $ax < b$ | $ax \leq b$ |
|---|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $a > 0$, знак неравенства не меняется | $x > \frac{b}{a}$ | $x \geq \frac{b}{a}$ | $x < \frac{b}{a}$ | $x \leq \frac{b}{a}$ |
| $a < 0$, знак неравенства меняется на противоположный | $x < \frac{b}{a}$ | $x \leq \frac{b}{a}$ | $x > \frac{b}{a}$ | $x \geq \frac{b}{a}$ |
| $a = 0, b = 0$ | Решений нет | $x \in (-\infty; +\infty)$ | Решений нет | $x \in (-\infty; +\infty)$ |
| $a = 0, b > 0$ | Решений нет | Решений нет | $x \in (-\infty; +\infty)$ | $x \in (-\infty; +\infty)$ |
| $a = 0, b < 0$ | $x \in (-\infty; +\infty)$ | $x \in (-\infty; +\infty)$ | Решений нет | Решений нет |

Неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ ($ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq 0$), где a , b и c — числа, $a\neq 0$, x — переменная, называется **квадратным**.

Рациональным неравенством называется неравенство, которое содержит только рациональные функции.

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются **показательными**.

Логарифмическими называют неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании.

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих неравенств (то есть если отыскиваются все общие решения этих неравенств).

Два неравенства называются **равносильными**, если множества их решений совпадают (в том числе неравенства, не имеющие решений, считаются равносильными).

Обозначение: $f(x)>g(x)\Leftrightarrow P(x)>h(x)$.

Если все решения первого неравенства являются решениями второго неравенства (множество решений первого неравенства является подмножеством решений второго неравенства), то второе неравенство называется **следствием** первого неравенства.

Обозначение: $f(x)>g(x)\Rightarrow P(x)>h(x)$.

Две системы неравенств называются равносильными, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам. Равносильность систем неравенств обозначается так же, как равносильность систем уравнений, то есть с помощью знака \Leftrightarrow .

Двойное неравенство $h(x)<f(x)<g(x)$ равносильно (эквивалентно) системе неравенств:

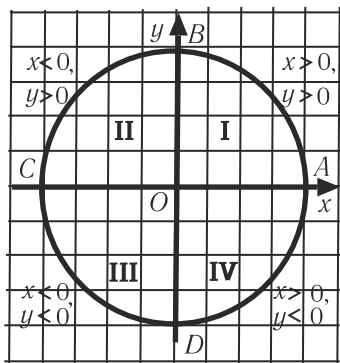
$$\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>h(x). \end{cases}$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

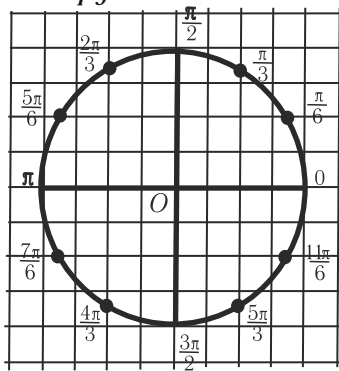
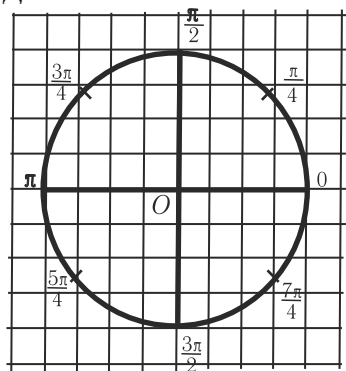
Здесь мы собрали основные формулы тригонометрии и расположили их так, чтобы ими было удобно пользоваться. Все формулы применяются при допустимых значениях аргументов.

Числовая окружность на координатной плоскости

Для любой точки $M(x; y)$ числовой окружности выполняются неравенства:
 $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1$



Два основных макета числовой окружности



Значения тригонометрических функций некоторых углов

| Углы в градусах | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° |
|-----------------------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|------------------|
| Углы в радианах | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — | 0 | — |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | — | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | — | 0 |

Формулы приведения

| x | $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ | $\pi \pm \alpha$ | $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ | $2\pi \pm \alpha$ |
|----------|----------------------------|-------------------|-----------------------------|-------------------|
| $\sin x$ | $\cos \alpha$ | $\mp \sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\pm \sin \alpha$ |
| $\cos x$ | $\mp \sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\pm \sin \alpha$ | $\cos \alpha$ |
| $tg x$ | $\mp ctg \alpha$ | $\pm tg \alpha$ | $\mp ctg \alpha$ | $\pm tg \alpha$ |
| $ctg x$ | $\mp tg \alpha$ | $\pm ctg \alpha$ | $\mp tg \alpha$ | $\pm ctg \alpha$ |

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k$$

$$tg \alpha \cdot ctg \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}$$

$$1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad 1 + ctg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg \alpha \pm tg \beta}{1 \mp tg \alpha \cdot tg \beta}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}$$

Арксинусом числа a ($-1 \leq a \leq 1$) называется такое число x из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Аркосинусом числа a ($-1 \leq a \leq 1$) называется такое число x из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Арктангенсом числа a называется такое число x из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

Аркотангенсом числа a называется такое число x из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

ГЕОМЕТРИЯ

Формулы для нахождения медианы и высоты треугольника

Пусть стороны треугольника a , b и c , тогда медиана, проведенная к стороне b , обозначается m_b , а высота, проведенная к стороне b , обозначается h_b .

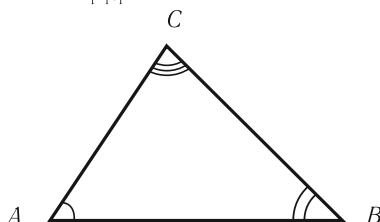
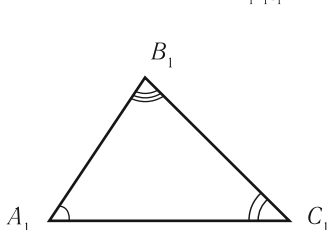
$$m_b = \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Теоремы о периметрах и площадях подобных треугольников

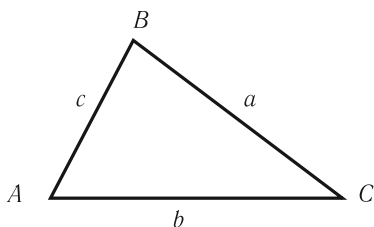
$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = k$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2$$



Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

Соотношение между сторонами и углами треугольника



Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° , 45° и 60°

| α | 30° | 45° | 60° |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $tg \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

Теорема косинусов

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$, где C — угол между сторонами a и b .

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

Формулы для вычисления площади

1. Треугольник

Произвольный треугольник. Введем некоторые обозначения: a , b , c — стороны треугольника; S — площадь треугольника; α — угол между сторонами a и b ; p — полупериметр треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$;

R — радиус окружности, описанной около треугольника; r — радиус окружности, вписанной в треугольник; h_a — высота, проведенная к стороне a .

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha \quad S = \frac{1}{2}ah_a$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Прямоугольный треугольник. Введем обозначения: a, b — катеты; c — гипотенуза; h_c — высота, проведенная к гипотенузе.

$$S = \frac{1}{2}ab \quad S = \frac{1}{2}ch_c$$

Равносторонний треугольник: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

2. Четырехугольник

Параллелограмм. Введем обозначения: S — площадь параллелограмма; a и b — смежные стороны; α — угол между ними; d_1 и d_2 — диагонали параллелограмма; φ — угол между диагоналями; h_a — высота, проведенная к стороне a .

$$S = ah_a \quad S = ab \cdot \sin \alpha \quad S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$$

Прямоугольник. Введем обозначения: S — площадь прямоугольника; a и b — смежные стороны; d — диагональ прямоугольника; φ — угол между диагоналями.

$$S = ab \quad S = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi$$

Ромб. Введем обозначения: S — площадь ромба; a — сторона ромба; α — угол; d_1 и d_2 — диагонали ромба; φ — угол между диагоналями; h_a — высота, проведенная к стороне a .

$$S = ah_a \quad S = a^2 \cdot \sin \alpha \quad S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

Квадрат. Введем обозначения: S — площадь квадрата; a — сторона квадрата; d — диагональ квадрата.

$$S = a^2 \quad S = \frac{1}{2}d^2$$

Трапеция. Введем обозначения: S — площадь трапеции; a и b — основания; h — высота трапеции.

$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$$

3. Окружность и круг

Длина окружности $C=2\pi R$, где C — длина окружности, R — радиус окружности, π — число, равное отношению длины окружности к ее диаметру. Для любых окружностей это число одно и то же ($\pi \approx 3,14$).

Площадь круга: $S=\pi R^2$.

Площадь кругового сектора: $S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha$.

Правильные многоугольники

Сумма углов правильного n -угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$, причем все его углы равны, поэтому внутренний угол α_n вычисляется по формуле

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ.$$

Формулы для вычисления площади правильного n -угольника, его стороны и радиуса вписанной окружности

Введем некоторые обозначения: S — площадь правильного n -угольника; a_n — его сторона; P — периметр; R — радиус окружности, описанной около правильного n -угольника; r — радиус окружности, вписанной в правильный n -угольник.

Для любого правильного n -угольника справедливы формулы:

$$S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r; \quad a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}; \quad r = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Выражение стороны правильного многоугольника через радиус описанной окружности:

$$a_3 = R\sqrt{3}, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_6 = R.$$

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные методы решения простейших комбинаторных задач:

- перебор возможных вариантов;
- дерево возможных вариантов;
- комбинаторное правило умножения;
- комбинаторное правило сложения.

Факториал: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

Перестановки. Общее количество перестановок из n элементов вычисляется по формуле: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Размещения. Общее количество размещений из n элементов по m вычисляется по формуле: $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(m-1)]$.

Сочетания. Общее количество сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Общее число сочетаний можно вычислить, пользуясь и другим выражением: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$.

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 \cdot a^{(n-1)} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + C_n^3 \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + C_n^{(n-1)} \cdot a^1 \cdot b^{(n-1)} + b^n.$$

Числовые характеристики рядов данных

- среднее арифметическое;
- мода;
- медиана;
- размах измерения.

Основные виды событий

- достоверное событие;
- невозможное событие;
- событие, противоположное данному событию;
- несовместные события;
- равновозможные события;
- зависимые события;
- сумма двух случайных событий.

Классическая вероятность $P(A) = \frac{m}{n}$

Свойства вероятности:

1. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(A)=0$.
2. Вероятность достоверного события равна единице: $P(A)=1$.
3. Вероятность случайного события не меньше нуля, но и не больше единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Сумма вероятностей противоположных событий: $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$.

Вероятность произведения зависимых событий определяется формулой $P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)$.

Если события A и B несовместные, то $P(AB)=0$.

Формула для вычисления вероятности суммы двух событий, все равно каких, совместных или нет, имеет вид:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Литература

Азевич А. И. Готовимся к единому государственному экзамену по математике. Варианты задач и решения. М.: Школьная Пресса, 2005 («Библиотека журнала «Математика в школе»; вып. 31).

Мордкович А. Г. Общие методы решения уравнений Научно-практический журнал «Математика для школьников», 2005, №4.

Единый государственный экзамен: математика: сб. заданий / Денищева Л. О., Безрукова Г. К., Бойченко Е. М. и др. 2-е изд. М.: Просвещение, 2006.

Задачник-практикум по математике. Алгебра. Тригонометрия: Для поступающих в вузы / Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.. М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО Издательство «Мир и Образование», 2005.

Научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе», 2005 г., №8, с. 2 («Функция, ее производная и первообразная на ЕГЭ»).

Научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе», 2007, №10, с. 31 («Некоторые способы решения уравнений и неравенств»).

Титаренко А. М. Форсированный курс школьной математики: Учебное пособие. Х.: Каравелла — Друк — РА, 1996.

Рисунки и картинки:

<http://www.bymath.net/studyguide/tri/sec/tri16.htm>

<http://www.math.md/school/praktikum/expr/exper.html>

<http://matematika.egopedia.ru/doku.php/>

<http://ege-study.ru/images-materials/img-line/3.jpg>

<http://www.terver.ru>

<http://viripit.ru/Page8.htm>

<http://www-formula.ru/index.php/2011-09-24-00-29-48>

<http://ege-study.ru/materialy-ege/>

http://www.cleverstudents.ru/perpendicular_planes.html

<http://ege-study.ru/materialy-ege/parallelnoe-proecirovanie-ploshhad-proekcii-figury/>

<http://shkolo.ru/pryamaya-prizma/>

<http://matematika.egopedia.ru/>

<http://licey102.k26.ru/dist-kurs/p5aa1.htm>

<http://www.bestreferat.ru/referat-46651.html>

<http://www.viktoriastar.ru/piramida.html>

<http://www.ankolpakov.ru/piramida-i-ee-elementy/>

http://mat.1september.ru/2003/17/no17_1.htm

<http://ru.onlinemschool.com/math/formula/volume/>
<http://geometry2006.narod.ru/Art/Lecture7.htm>
http://mat.1september.ru/2003/18/no18_1.htm
<http://school.xvatit.com/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:1-07-50.jpg>
<http://oldskola1.narod.ru/Kiselev70/023.htm>
http://godkosmicheskoiJerry.ru/mg_11-1.htm
<http://otherreferats.allbest.ru/mathematics/d00180859.html>
<http://knowledge.allbest.ru/mathematics/d-2c0b65635a3ac68b4d53a89521316d27.html>
<http://oldskola1.narod.ru/Nikitin/0115.htm>
<http://ppt4web.ru/geometrija/metod-parallelnogo-proektirovaniya-izobrazhenie-prostranstvennykh-figur-na-ploskosti.html>
<http://oldskola1.narod.ru/Jakovlev/Jakovlev049.htm>
http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/angle_between_skew_lines.html
<http://ege-ok.ru/2012/03/19/ugol-mezhdu-ploskostyami-metod-koordinat-zadanie-s2/>
<http://rudocs.exdat.com/download/docs-13895/13895.doc>
http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/distance_between_skew_lines.html
http://fizmat.by/math/trigonometry/trigon_uravneniya
<http://ege-ok.ru/2012/>
<http://reshuege.ru>
http://ucheba-legko.ru/lections/viewlection/matematika/9_klass/uravneniya_i_sistemy_uravneniy/lec_graficheskoe_reshenie_uravneniy
http://www.tutoronline.ru/blog/dec_2011/zadanie-figur-na-koordinatnoj-ploskosti-uravnenijami-i-neravenstvami.aspx
http://skolniki.narod.ru/zadanie1_mat.htm
http://mathematicka.ru/ege/problems/problem_B13.html#type4
<http://oldskola1.narod.ru/Nikitin/0081.htm>
<http://yandex.ru/clck/jsredir?from=yandex.ru>
http://godkosmicheskoiJerry.ru/mg_10-1.htm
<http://uztest.ru/abstracts/?id=21&t=6>
http://fizmat.by/math/inequality/properties_inequalities
<http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=327892>
http://www.mathprofi.ru/lineinye_neravenstva.html
http://www.tutoronline.ru/blog/dec_2011/zadanie-figur-na-koordinatnoj-ploskosti-uravnenijami-i-neravenstvami.aspx
http://www.tutoronline.ru/blog/jan_2012/neravenstva-i-sistemy-neravenstv-s-dvumja-peremennymi.aspx

Учебное пособие

+12

**Полный курс подготовки к ЕГЭ +
мультимедийный репетитор Яндекс**

**Ольга Владимировна Большакова
Елена Владимировна Карпунина**

МАТЕМАТИКА
Полный курс подготовки к ЕГЭ (+CD)

Редактор Е. Н. Чупина
Корректор
Технический редактор Т. В. Климова

Подписано в печать 18.06.2014.
Формат 60 х 90/16.
Гарнитура Литературная. Усл. п. л. 22.
Тираж экз. Зак.

ООО «Издательство АСТ»
129085, РФ, город Москва, Звездный бульвар, дом 21,
строение 3, комната 5.
www.ast.ru

«АВАНТА» И ЯНДЕКС ПРЕДСТАВЛЯЮТ: НОВЫЙ МУЛЬТИМЕДИЙНЫЙ РЕПЕТИТОР для подготовки к ЕГЭ

Это пособие поможет школьнику в самостоятельной подготовке к ЕГЭ. Оно содержит теорию, включающую в себя удобные для запоминания таблицы и примеры, и составлено с учетом обязательной программы по данному предмету. Это пособие — ваш персональный репетитор, который поможет не только изучить и понять материал, но и научит правильно и без боязни обращаться с заданиями, представленными в тестовой форме.



К ПОСОБИЮ
ПРИЛАГАЕТСЯ
КОМПАКТ-ДИСК,
КОТОРЫЙ ВКЛЮЧАЕТ
В СЕБЯ:

- ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КАЖДОЙ ГЛАВЕ ПОСОБИЯ;
- ПРОБНЫЕ ВАРИАНТЫ ЕГЭ для подготовки к экзаменам.

В СЕРИЮ

**ПОЛНЫЙ КУРС
ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ**

**ВХОДЯТ ОБУЧАЮЩИЕ ПОСОБИЯ ПО СЛЕДУЮЩИМ
ПРЕДМЕТАМ:**

- РУССКИЙ ЯЗЫК
- ФИЗИКА
- МАТЕМАТИКА
- ОБЩЕСТВОЗНАНИЕ
- ЛИТЕРАТУРА
- БИОЛОГИЯ
- ХИМИЯ

ISBN 978-5-17-079483-6



9 785170 794836 >

Аванта